INVALSI

PROGETTO FINVALI 2005

Progetto 032: Il sistema scolastico come sistema complesso: qualità delle rilevazioni e modelli di interpretazione dei risultati

Istituto per le Applicazioni del Calcolo 'Mauro Picone' del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Sede di Napoli

Dipartimento di Statistica e Matematica per la Ricerca Economica, Università degli Studi di Napoli 'Parthenope'

Con la partecipazione di

Dipartimento di Statistica, Università degli Studi di Milano Bicocca

Dipartimento di Scienze della Terra, Università degli Studi di Napoli 'Federico II'

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Napoli 'Federico II'

INVALSI	**PROGETTO FINVALI 2005**

Progetto 032: Il sistema scolastico come sistema complesso: qualità delle rilevazioni e modelli di interpretazione dei risultati

Report maggio 2007: Strumenti concettuali per la rappresentazione del sistema scolastico come sistema adattativo complesso

Marco Fattore[(1)]

Facoltà di Scienze Statistiche

[(1)] Dipartimento di Statistica, Università degli Studi di Milano Bicocca

Abstract: Nel presente report verranno discussi diversi approcci alla modellizzazione della complessità, ponendo l'enfasi sul concetto di rete (network), come base per la descrizione di un sistema sociale. Pur in assenza di contributi specifici relativi all'ambito scolastico, l'utilizzo del concetto di rete è, infatti, avvalorato dalle applicazioni che di tale nozione sono state fatte, sia nelle discipline fisiche e naturali che nella disciplina sociologica.

Indice

1 Il sistema scolastico come sistema complesso

La complessità, come categoria interpretativa delle dinamiche evolutive dei sistemi sociali, è ormai un dato acquisito all'interno delle scienze sociali e nei vari ambiti in cui queste trovano applicazione. In sostanza, si riconosce che qualunque sistema organizzativo e sociale si trova ad agire in un ambiente-contesto dinamico, con il quale scambia costantemente informazioni, le quali influenzano il comportamento del sistema stesso, dando luogo ad un processo adattativo che modifica sia il sistema che il contesto.

A discapito della riconosciuta rilevanza di queste nozioni in ambito organizzativo e sociale, sono pochi, in letteratura, i riferimenti al sistema scolastico. Possiamo schematicamente suddividere in tre categorie i contributi che abbiamo rintracciato mediante una ricerca bibliografica:

1. Testi e articoli genericamente orientati alla descrizione di sistemi organizzativi (tipicamente aziendali) come sistemi adattativi complessi. Questi contributi sono storicamente motivati dal processo storico di rapido e progressivo "accorciamento" dei tempi di diffusione delle innovazioni tecnologiche, che rendono più rilevante, per qualunque organizzazione, la capacità di adattamento rispetto a quella di pianificazione.

2. Testi e articoli che discutono la rilevanza di "educare alla complessità", cioè di inserire la complessità negli obiettivi della formazione, attraverso modalità didattiche differenti. Si tratta, quindi, di contributi che non descrivono la complessità del e nel sistema scolastico, ma che riconoscono la rilevanza della nozione di complessità come categoria necessaria per interpretare il contesto attuale e quindi ne fanno oggetto di formazione.

3. Testi e articoli che, tentativamente, cercano di guardare al sistema scolastico da un punto di vista sistemico, riconoscendone la natura di "learning organization".

I testi che possono essere di qualche utilità per i nostri obiettivi ricadono evidentemente nella prima e, soprattutto, nella terza categoria; occorre però fare le seguenti osservazioni:

- La letteratura che si occupa più specificamente del sistema scolastico si rifà ad un generico approccio sistemico e pochi sono i contributi che utilizzano esplicitamente la nozione di complessità.

- Il tema più discusso e che più sollecita l'attenzione degli autori è quello della riforma del sistema scolastico e buona parte dei contributi che abbiamo rintracciato si occupano di questo problema, che rientra nel più ampio ambito del "change management".

- Pur rimanendo nell'ambito di un generico riferimento ad un approccio sistemico, nei documenti che abbiamo consultato si possono, effettivamente, rintracciare termini che si avvicinano alla categoria dei sistemi adattativi complessi. In particolare, alcuni contributi fanno riferimento all'esistenza, all'interno del sistema scolastico, di pattern di interazione, di processi di feedback, di reti di comunicazione e, più in generale, di caratteristiche tipiche di un sistema aperto e teleologico. Si tratta, per quanto abbiamo potuto verificare sinora, di spunti abbastanza occasionali e non pare esserci un corpus di conoscenze consolidate.

In definitiva, non sembra che vi sia un approccio strutturato alla descrizione del sistema scolastico, basato sulla nozione di sistema complesso adattativo. Il livello tipico della letteratura cui abbiamo potuto accedere è metaforico. L'apertura del sistema allo scambio di informazioni con l'esterno, la presenza di comportamenti emergenti, l'esistenza di un principio finale che determina, almeno parzialmente, i processi evolutivi e tutti gli altri elementi che genericamente possono essere riferiti alla complessità adattativa possono efficacemente essere riassunti in un'immagine "ecologica", di rapporto tra una organismo dotato di DNA (e quindi con delle leggi proprie di comportamento) e un ambiente circostante. Ma al di là di metafore di questo tipo, non abbiamo rintracciato alcuna descrizione compiuta delle caratteristiche di un sistema complesso, empiricamente riscontrabili all'interno del sistema scolastico. Manca, cioè, una definizione delle strutture e dei processi che configurano la complessità del sistema scolastico, che permetta di fondare un modello di rappresentazione quantitativa, in grado di riprodurre, almeno schematicamente, le dinamiche del sistema e di fornire indicazioni per il suo governo.

Come sarà discusso più ampiamente nel prossimo paragrafo, vi sono diversi approcci alla modellizzazione della complessità. In questo lavoro abbiamo scelto di porre l'enfasi sul concetto di rete (network), come base per la descrizione di un sistema sociale. Pur in assenza di contributi specifici relativi all'ambito scolastico, l'utilizzo del concetto di rete è, infatti, avvalorato dalle applicazioni che di tale nozione sono state fatte, sia nelle discipline fisiche e naturali che nella disciplina sociologica.

In molte aree si è osservato come la struttura relazionale e di interazione di un insieme di soggetti o di entità (siano esse persone o componenti fisiche) stia alla base della "complessità" (Buchanan, 2004) ossia, in termini del tutto generali, del sorgere di un comportamento del sistema non banalmente riconducibile alla "sovrapposizione" del comportamento dei singoli componenti del sistema stesso (per esempio, tutti i fenomeni di polarizzazione e coerenza, cioè di comportamenti collettivi, derivano sempre dall'instaurarsi di interazioni a lungo raggio, dovute alla cooperazione di individui "vicini". Nel sistema, le interazioni "elementari" sono sempre a breve raggio, ma la cooperazione tra agenti produce l'emergere di comportamenti coerenti su scale macroscopiche).

L'attenzione per lo studio degli aspetti relazionali sembra quindi essere scientificamente e culturalmente giustificato. Del resto, la letteratura relativa alla descrizione di ambiti sociali in termini di reti è ormai molto ampia e il punto di vista della rete sociale è ormai patrimonio della comunità scientifica sociologica ed economica. Non a caso, una parte rilevante degli strumenti d'indagine che verranno presentati in questo documento sono mutuati proprio da questi ambiti.

Il sistema scolastico è costituito da una pluralità di soggetti in interazione fra loro e in interazione con il contesto culturale, sociale e istituzionale al cui interno essi sono collocati. I soggetti sono diversi non solo perché è elevato il numero di chi, a vario titolo e con diversi ruoli, partecipa al sistema, ma anche, e soprattutto, perché la loro natura e la loro tipologia sono estremamente diversificate. E molto varie sono anche le interazioni che fra tali soggetti si instaurano e si intrecciano, con effetti diretti e indiretti dei quali, verosimilmente, non si possiede ancora una conoscenza adeguata. Certamente, però, queste interazioni hanno effetti che coinvolgono tutti i livelli a cui il sistema scolastico può essere descritto: il livello del singolo studente o del singolo docente, il livello del singolo istituto o di reti di istituti e, infine, anche il livello del sistema nel suo complesso. Senza pretesa di essere esaustivi ci pare di poter identificare il seguente quadro di riferimento, per quanto concerne gli attori e le relazioni presenti all'interno del sistema scolastico:

1. i singoli studenti, che sono in relazione diretta fra di loro, all'interno della classe e con i singoli docenti. Si tratta, evidentemente, di relazioni ed interazioni fondamentali, perché da esse dipende direttamente il soddisfacimento del bisogno formativo degli studenti e, per quanto compete alla scuola, anche di quello educativo. L'efficacia dell'apprendimento dipende, infatti, non solo dal rapporto tra discente e docente, ma anche dal contesto della classe, essendo l'apprendimento un processo non lineare, con feedback e retroazioni complesse.
2. I docenti, che sono in relazione fra loro, sia all'interno dell'istituto (o degli istituti) in cui insegnano, sia tramite l'appartenenza ad associazioni o realtà di natura differente (per es. associazioni di insegnanti).
3. I presidi, che hanno un ruolo particolare nel sistema scolastico, e che sono in diretta relazione con i docenti dell'istituto (o degli istituti) in cui esercitano la propria funzione, oltre ad essere in relazione fra loro, con gli studenti e con le istituzioni.
4. Il Ministero e tutti gli attori istituzionali ad esso collegati, che rappresentano attori

fondamentali, avendo in carico le leve del governo generale dell'intero sistema scolastico.

5. I sindacati e altre associazioni di rappresentanza interne alla scuola che, di fatto, svolgono un ruolo molto attivo, in particolare nella scuola statale.
6. Le numerose associazioni di insegnanti operanti nel mondo della scuola. Queste associazioni, con riferimenti culturali vari e diversificati, attraverso numerose attività (per esempio, corsi di aggiornamento), contribuiscono ad "immettere" nel sistema scolastico contenuti culturali e strumenti didattici e quindi hanno un impatto sui processi fondamentali del sistema. Per fornire un'idea del numero dei soggetti coinvolti nell'ambito formativo, in appendice è riportato l'elenco dei soggetti accreditati dal MIUR (disponibile sul relativo sito web) per svolgere attività di formazione.
7. I singoli istituti scolastici che sono, in quanto tali, attori del sistema (è un fatto, per esempio, che si possa attribuire al singolo istituto l'attributo di "buono" o "cattivo", di "efficiente" o "inefficiente"). Gli istituti hanno poi interazioni fra loro, con i soggetti istituzionali e con le realtà associative o sindacali cui abbiamo fatto cenno.
8. Infine, le famiglie che sono, con tutta evidenza, attori fondamentali del sistema scolastico, anche se in una posizione del tutto particolare rispetto agli altri attori "istituzionali".

Naturalmente, vi sono moltissime altre entità e realtà che possono interagire con il sistema scolastico. Non è semplice stabilire se individuarle come attori o lasciarle sullo sfondo di un contesto di Sistema Paese che, in un certo senso, rappresenta esso stesso un ulteriore elemento imprescindibile per la comprensione del sistema formativo e delle sue prestazioni. Citiamo, a titolo d'esempio, il complesso mondo della formazione professionale che è in stretta interazione con il tessuto economico e istituzionale regionale (ciò mette anche in evidenza come la presenza di alcuni attori e di alcune interazioni possa dipendere dal tipo di formazione cui si fa riferimento).

Concludiamo con un'ultima osservazione di metodo. Abbiamo già discusso come all'interno del sistema scolastico si intreccino diverse relazioni tra soggetti differenti. Certamente, a seconda degli attori coinvolti e "del livello" d'indagine (studente, classe, istituto…), alcune relazioni sono più rilevanti di altre, anche in relazione ai processi tipici di ogni singolo livello. Infatti, si possono individuare diversi "layer" caratterizzati da diversi sistemi relazionali, per esempio:

1. Il singolo discente;
2. La classe;
3. L'istituto scolastico.

Ognuno di questi livelli è, anche singolarmente considerato, un sistema complesso: si passa dalla complessità umana e psicologica del discente, a quella anche organizzativa dei rapporti con il docente e con la classe e agli effetti che questi hanno sull'educazione, sull'apprendimento e sulla maturazione dei singoli scolari, sino alla complessità organizzativa di un istituto scolastico. Se, da una parte, individuare diversi livelli e trattarli in maniera distinta non è del tutto coerente con il concetto di sistema complesso, ci pare, comunque, si tratti di una semplificazione accettabile e, in parte, inevitabile. In questo lavoro, peraltro, non entreremo in merito ai singoli livelli. Illustreremo, invece, un insieme di metodologie e di strumenti che possono essere utilizzati per la descrizione e lo studio delle strutture relazionali interne al sistema scolastico, a qualunque livello ci si riferisca. Nelle applicazioni, di volta in volta, si tratterà poi di stabilire la semantica corretta per il livello indagato.

2 Strumenti per la rappresentazione della complessità

L'interpretazione del sistema scolastico come sistema adattativo complesso comporta l'utilizzo congiunto e contemporaneo di una pluralità di schemi e modelli di rappresentazione differenti. Con un'espressione poco formale, potremmo dire che, se esiste (sostanzialmente) un solo modo nel quale un sistema può essere lineare, esistono infiniti modi in cui esso può essere complesso. Ogni "modo di complessità" porta con sé strumenti di rappresentazione specifici; da qui segue la necessità di ampliare lo spettro dei modelli di riferimento.

Le proposte di strumenti concettuali e formali per la costruzione di modelli per sistemi complessi che si possono ritrovare in letteratura sono innumerevoli e si distinguono per obiettivi, metodi, tecniche e formalismi (Boccara, 2004). Le numerosissime ed alternative proposte hanno, però, natura particolare e specifica, giacché sono spesso legate ad ambiti di applicazione particolari, dove emergono singoli aspetti del generico concetto di complessità.

In senso generale, la complessità viene riconosciuta dal fatto che nel sistema si instaurano particolari dinamiche macroscopiche, non banalmente riconducibili al comportamento dei singoli elementi e spesso le tecniche e i modelli invocati sono strettamente legati alla fenomenologia di cui si desidera rendere conto. Così, esistono modelli per rappresentare il formarsi di code autostradali, per rappresentare la formazione e la dinamiche di dune di sabbia, per studiare sistemi fisici caotici mediante equazioni differenziali non lineari, per analizzare sistemi con forte dipendenza dai dati iniziali o per rappresentare le dinamiche collettive di sistemi, classici o quantistici, di molte particelle (si pensi, per fissare le idee, alla termodinamica delle transizioni di fase).

Con riferimento all'ambito sociale, si deve notare che, se da una parte è possibile riscontrare anche in tale contesto forti analogie con gli elementi di complessità che caratterizzano i sistemi fisici (sostanzialmente, il fatto che interazioni che coinvolgono localmente solo un numero limitato di elementi possano dar vita a strutture collettive e ad effetti macroscopici), dall'altra occorre notare come tale analogia sia difficilmente perseguibile in termini di modelli quantitativi. Ad esempio, modelli di comportamento economico che cercano di emulare i modelli fisici conducono alla descrizione di fenomenologie interessanti, ma in un ambito poco più che simulativo e con una tale stilizzazione della realtà, da non consentire la costruzione di alcun modello applicabile. Si rimane, così, spesso su un piano di pura analogia.

Una prospettiva lievemente differente è perseguita da quella classe di modelli che, rinunciando ad una formalizzazione analitica delle relazioni e delle interazioni fra elementi del sistema, cerca di riprodurre fenomenologie complesse attraverso l'assegnazione di particolari regole di comportamento al singolo agente e la successiva simulazione del comportamento collettivo. In questo senso, lo sviluppo degli automi cellulari, e di numerosi applicativi software in grado di costruire simulazioni con estrema efficienza, rappresenta certamente una prospettiva interessante. Al momento, però, questi tipi di modelli hanno forse più un interesse esplorativo che di vera modellizzazione di fenomeni reali.

A questo ambito appartengono, per esempio, numerosi modelli utilizzati in campo economico. Qui gli automi cellulari sono utilizzati per mostrare come per generare e riprodurre dinamiche di mercato non sia necessario assumere che gli agenti economici siano dotati di razionalità perfetta o che dispongano di informazione completa; essi vengono anche utilizzati per studiare dinamiche di equilibrio macro-economico e per individuare possibili politiche di governance (Terna, Boero, Morini, Sonnessa, 2006).

Un differente approccio alla descrizione e allo studio dei sistemi complessi è quello che si appoggia sull'analisi della struttura topologica delle relazioni fra elementi del sistema. In breve, si tratta di individuare le caratteristiche intrinseche della struttura di rete sottostante le relazioni fra gli agenti e di collegarle alla fenomenologia del sistema medesimo, in termini di auto-oganizzazione, di risposta a sollecitazioni esterne e, in generale, alla possibilità che "comportamenti di tipo complesso" possano emergere a livello macroscopico. Recenti studi (Watts, 2004), infatti, mostrano come al di là della natura dei fenomeni studiati, la struttura relazionale possa, in quanto tale, rendere conto dell'emergenza della complessità (o, perlomeno, di alcuni aspetti della complessità).

La nostra scelta cade su questo tipo di approccio. Nel seguito del presente documento, quindi, introdurremo gli schemi formali mediante i quali è possibile studiare e rappresentare la struttura relazionale di una rete sociale.

A sua volta, il campo dello studio delle reti sociali vede al proprio interno l'utilizzo di tecniche e strumenti diversi (Degenne&Forsé, 1994) e lo sviluppo di filoni di ricerca di natura differente. In questa sede, ci muoveremo su due linee principali. Da una parte cercheremo di individuare gli aspetti topologici in grado di identificare le caratteristiche essenziali di una struttura di rete. Dall'altra, adotteremo un linguaggio prettamente algebrico per lo studio della struttura relazionale delle reti, con il vantaggio di astrarre completamente dalla natura delle relazioni esistenti tra gli agenti.

Più precisamente, nei paragrafi seguenti passeremo in rassegna i seguenti aspetti:

1. Studio delle modalità e degli strumenti con i quali è possibile rappresentare le caratteristiche strutturali e topologiche di una rete. In particolare, verranno esaminati gli indicatori di tipo "puntuale" (cioè caratterizzanti i singoli nodi della rete), gli indicatori di

tipo globale (cioè caratterizzanti la struttura complessiva della rete), nonché le strutture algebriche e formali mediante le quali è possibile rappresentare e confrontare la struttura relazionale globale di una o più reti.

2. Individuazione delle caratteristiche topologiche in grado di generare, all'interno della rete, comportamenti e fenomenologie di tipo complesso. Non tutte le topologie di rete sono in grado, infatti, di sostenere fenomenologie complesse ed è quindi importante stabilire, all'interno di una rappresentazione strutturale di una rete, quali attributi siano rilevanti dal punto di vista dell'emergenza della complessità.

3. Breve analisi preliminare delle principali conseguenze che la rappresentazione del sistema scolastico come "rete sociale" ha sui metodi statistici da impiegare in fase di analisi e valutazione del sistema scolastico stesso (questo studio sarà poi compiutamente sviluppato nel corso di una successiva fase di progetto). Infatti, l'esistenza di una struttura relazionale tra agenti del sistema si traduce nell'esistenza di probabili correlazioni tra le variabili statistiche d'interesse e ciò, a sua volta, ha un impatto sulle modalità di trattamento formale dell'informazione statistica sul mondo scolastico. Nel caso di analisi campionarie, per esempio, l'efficienza delle stime e i costi dell'indagine sono strettamente connessi alla bontà e dimensione del campione che, idealmente, dovrebbe essere contemporaneamente rappresentativo della popolazione totale e di dimensioni contenute. Il trade-off che esiste tra queste due caratteristiche richiede che il campione venga costruito utilizzando quanta più informazione "di contesto" possibile, cioè, nel caso in esame, quanta più informazione sui legami esistenti tra agenti, per poterne "spiegare" somiglianze e differenze. In generale, poi, la correttezza e l'efficienza di qualunque strumento statistico (cioè, essenzialmente, la sua capacità di sfruttare al meglio l'informazione a disposizione e quindi la minimizzazione dell'incertezza nelle conclusioni, o stime, prodotte) dipendono dalla struttura di correlazione tra le variabili considerate e di conseguenza trascurare la struttura relazionale del sistema può condurre ad una generale inefficienza e distorsione dei risultati. E chiaramente, anche l'interpretazione dei risultati necessita di una conoscenza quanto più ampia possibile degli aspetti sistemici della rete scolastica, soprattutto se l'osservazione fa emergere fenomenologie di tipo complesso e auto-organizzato. Infine, la necessità di ricostruire la topologia della rete attraverso indagini necessariamente parziali, conduce al problema di sviluppare e adottare tecniche statistiche capaci di fornire stime attendibili dei parametri strutturali della rete, nonché strumenti formali in grado di permettere la rappresentazione visuale delle stesse strutture di network, agevolando la possibilità di "vedere" e "comprendere" la complessità.

L'obiettivo di questo lavoro è quello di portare all'attenzione di Invalsi un insieme di concetti, metodi e tecniche che, opportunamente combinati, rendono possibile impostare un'indagine organica sulla complessità del sistema scolastico, a partire dall'analisi delle strutture relazionali esistenti al suo interno. Nel prosieguo del documento, non si cercherà né la completezza assoluta (la letteratura "tecnica" è molto vasta e non sarebbe né possibile, né utile considerarla nella sua interezza; ad essa, comunque, ci riferiremo puntualmente, ogniqualvolta nel testo verrà introdotto un concetto specifico), né il formalismo più rigoroso, volendo comunicare i contenuti della ricerca a figure provenienti da ambiti diversi. Laddove non sarà possibile evitare un certo grado di formalizzazione, si cercherà di affiancare a formule e definizioni una spiegazione del significato e del senso di tali passaggi, in modo che la comprensione del significato non sia offuscata dagli aspetti più tecnici.

Per tale ragione, pur seguendo un approccio globalmente deduttivo, e quindi proponendo una sequenza che da alcuni concetti generali giunge poi a modelli più specifici e adeguati all'oggetto dello studio, introdurremo le varie definizioni di cui avremo bisogno solo quando il contesto del discorso le renderà naturali e, almeno nel loro senso generale, comprensibili ed attese.
La teoria dei grafi e le teorie algebriche per la descrizione strutturale delle reti sono molto articolate e raggiungono notevoli livelli di sofisticatezza. Noi ci limiteremo a illustrarne le linee portanti, per fornire un'idea coerente delle opportunità di modellizzazione che esse offrono.

3. Rappresentazione strutturale di una rete sociale

3.1 Introduzione

Con il termine "rappresentazione strutturale" intendiamo il processo mediante il quale si associano ad un insieme di soggetti sociali uno o più insiemi di oggetti formali, sui quali sia possibile effettuare analisi ed elaborazioni, il cui risultato fornisca informazioni sul sistema sociale d'interesse. Naturalmente, nel passaggio dall'oggetto reale agli oggetti formali si effettuano inevitabilmente riduzioni e schematizzazioni, per cui ogni processo di rappresentazione coglie alcuni aspetti di realtà e ne perde altri. La scelta del tipo di rappresentazione dipende quindi dagli obiettivi dell'analisi e dal "taglio" che si intende dare al modello cui si è interessati.

In questa sede, il punto di vista assunto è quello della "rete", per cui tutti i modelli cui faremo cenno partono innanzitutto dalla formalizzazione del concetto di network e quindi dall'utilizzo della teoria dei grafi. Essi, invece, si differenziano per gli aspetti strutturali di un grafo che cercano di mettere in evidenza e per gli strumenti formali con cui perseguono questo obiettivo.

Nei paragrafi che seguono, illustreremo diversi approcci alla caratterizzazione strutturale di un grafo. Quale di questi potrà essere più utile per la modellizzazione di un sistema come quello scolastico non può essere stabilito a priori e solo successive ricerche potranno dare risposte in merito. Certamente, è nella struttura relazionale che sta, almeno in parte, la possibilità di rendere conto della fenomenologia del sistema formativo, sia nei suoi aspetti genericamente sistemici che in quelli più propriamente complessi.

Sostanzialmente, percorreremo tre diversi approcci alla descrizione di un grafo. Il primo approccio, che potremmo chiamare "classico", prende le mosse dalle definizioni di base della teoria dei grafi e conduce semplicemente a individuare un insieme di caratteristiche utili a descrivere un grafo generico. Il secondo approccio, che è in parte una specificazione del primo, segue i recenti sviluppi sulla caratterizzazione delle topologie di rete small-world e scale-free. Si tratta di strutture relazionali che possono svilupparsi attraverso meccanismi casuali abbastanza semplici e che risultano particolarmente adatte a generare fenomenologie complesse. La descrizione di topologie small-world avviene attraverso la costruzione di particolari indici che sintetizzano proprietà globali del grafo. L'eventuale esistenza di tali topologie all'interno di uno specifico grafo può essere presa a indice dell'esistenza di meccanismi particolari di generazione casuale di link tra gli agenti del sistema e ciò, a sua volta, agevola l'interpretazione dei meccanismi di evoluzione della rete. Infine, il terzo approccio, che possiamo chiamare "algebrico", consiste nel tentativo di rappresentare la struttura globale e locale di un grafo mediante opportune strutture algebriche, la cui struttura di moltiplicazione e di ordinamento parziale rispecchi le proprietà sistemiche del grafo. Dei tre, questo approccio è forse il più tecnico e complesso, ma consente di costruire un formalismo molto interessante, in grado di produrre analisi e confronti tra grafi diversi che si rivelano utili, per esempio, se si è orientati a tracciare l'evoluzione temporale di un sistema di agenti sociali.

Nei prossimi paragrafi passeremo in rassegna i concetti fondamentali di ciascuno degli approcci che abbiamo indicato, cominciando, innanzitutto, dalle basi della teoria dei grafi, che rappresenta l'ambito generale dell'intera discussione. Naturalmente, non è nostro obiettivo presentare un compendio esaustivo di tale disciplina, per la quale possono essere consultati numerosissimi testi (per esempio, Godsil&Royal, 2001; Diestel, 2000; Bollobas, 2002; Chartrand, 1984; Trudeau, 1994).

3.2. Elementi di teoria dei grafi

La nozione di grafo è piuttosto intuitiva e, in termini figurati, può essere introdotta semplicemente pensando a un qualunque insieme finito di punti del piano collegati tra loro, in maniera diversa, da un insieme di connessioni. Figura 1 fornisce un banale esempio di tale struttura.

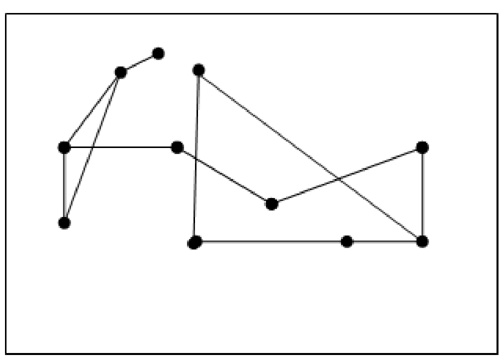

Figura 1. Esempio di grafo.

Le connessioni tra i punti del grafo di Figura 1 non hanno alcun orientamento e infatti un grafo di questo tipo è chiamato "grafo non orientato". Se, viceversa, ad ogni connessione viene attribuito un verso, il grafo viene detto "orientato" e la relazione tra i punti cessa di essere simmetrica, dato che l'orientamento stabilisce il punto da cui parte la connessione e il punto in cui questa termina. Figura 2 mostra l'aspetto di un grafo orientato.

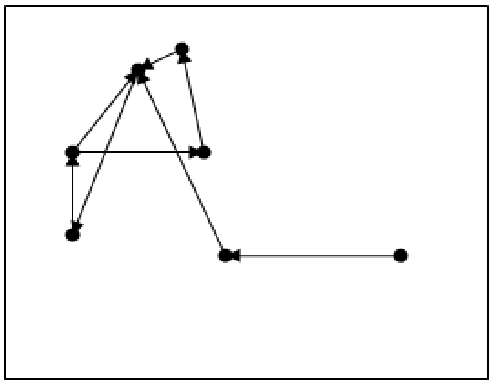

Figura 2. Esempio di grafo orientato.

Formalmente, la definizione di grafo può essere data nel seguente modo. Sia V un insieme finito di punti, detti *vertici*, e W un insieme di coppie ordinate (s,t) (dette *archi*), con s e t elementi di V (in altri termini W è un sottoinsieme del prodotto cartesiano V x V di V con se stesso). La coppia G=(V,W) è detta grafo orientato.

Se l'implicazione

(s,t) appartiene a W IMPLICA (t,s) appartiene a W

è vera, allora il grafo G è detto non orientato (quindi il grafo è non orientato se, quando tra due vertici esiste un arco orientato, allora esiste anche l'arco orientato in senso opposto).

Nelle applicazioni, i vertici corrispondono a "individui" e gli archi corrispondono a relazioni esistenti tra essi. Nel caso scolastico, per esempio, potremmo pensare ad un arco non orientato tra scuole ogni qualvolta queste abbiano il medesimo preside o quando queste abbiano partecipato a progetti comuni negli ultimi “n” anni e così via. Nella realtà, e certamente nel caso del sistema scolastico, tra individui del sistema possono instaurarsi diverse relazioni contemporaneamente e quindi tra i corrispondenti vertici del grafo possono esistere diversi tipi di arco. Formalmente, questa situazione non richiede particolari modifiche della definizione di grafo, semplicemente, si tratta di considerare non la coppia (V,W), ma una k+1-upla (V, $W_1,\ldots, W_k$), dove ogni W_i (i = 1,…,k) è un opportuno sottoinsieme di $V \times V$. Per semplicità, noi svilupperemo gran parte del discorso in termini di grafi con un solo tipo di relazione e solo quando strettamente necessario considereremo grafi con più relazioni.

L’interesse per la nozione di grafo nasce dal fatto che attraverso le relazioni, dirette o indirette, che si instaurano tra individui, possano fluire “informazioni” (il termine è usato in senso lato) tali da far emergere strutture di comportamento sistemiche. Introduciamo perciò alcune definizioni che permettono di caratterizzare il grafo dal punto di vista della struttura dei legami e dei percorsi tra vertici. Diremo che due vertici sono *adiacenti* se essi sono connessi da un arco e diremo che un vertice è *incidente* rispetto a un arco, se l’arco comincia o termina (le due cose coincidono nel caso di una arco non orientato) nel vertice in esame. Un grafo può non contenere archi (benché questa sia una situazione estrema e di interesse più formale che sostanziale) e comunque, in generale, non tutte le coppie di vertici saranno collegate fra loro. Se invece ciò avviene, il grafo è detto *completo*. Un grafo completo, pertanto, contiene tutti i possibili archi fra vertici ed è caratterizzato dal fatto che una coppia qualunque di vertici è necessariamente adiacente. Figura 3 mostra un esempio di grafo completo e uno di grafo non completo.

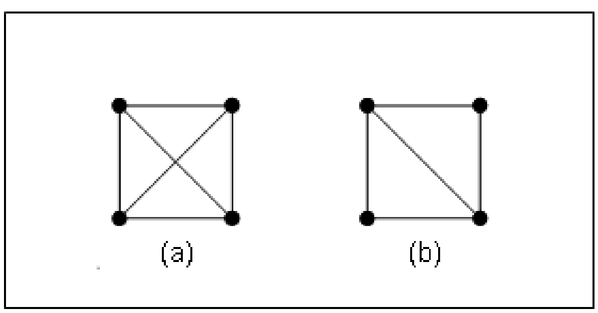

Figura 3. Grafo completo (a) e grafo non completo (b).

Un *cammino* è una successione di archi distinti che congiungono due differenti vertici. Se i vertici coincidono, cioè se il cammino è chiuso, esso è detto *ciclo* o *circuito*. Figura 4 mostra un esempio di tali percorsi in un grafo non orientato.

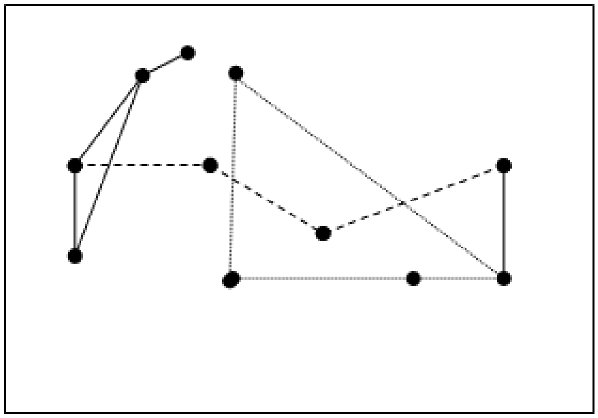

Figura 4. Esempio di cammino (trattini) e di ciclo (puntini).

Un *sottografo* G'=(*U,Z*) di un grafo G=(*V*, *W*) è semplicemente un grafo tale che *U* sia un sottoinsieme di *V* e *Z* sia un sottoinsieme di *W*. In altri termini, un sottografo G' di G è un grafo contenente parte dei vertici e degli archi del grafo di partenza. Se in un sottografo G' due vertici sono connessi se e solo se lo sono nel grafo di partenza G, allora G' è detto sottografo *indotto* di G. Descrittivamente, un sottografo indotto è ottenuto dal grafo originario estraendo da quest'ultimo un sottoinsieme di vertici insieme a tutti gli archi che li connettono fra loro. Ad esempio, il sottografo ottenuto estraendo dal grafo riportato in Figura 4 i quattro vertici che fanno parte del ciclo, insieme ai quattro archi che li collegano, è un sottografo indotto. Viceversa, se uno dei quattro archi non venisse estratto, si otterrebbe semplicemente un sottografo. Un sottografo completo, nel senso della definizione prima enunciata, è detto *clique*.

Essendo in ultima analisi interessati al passaggio di informazioni tra individui attraverso le relazioni dirette ed indirette che li collegano, è poi di interesse definire i concetti di *distanza* tra vertici e di *intorno* di un vertice.

Scelti due vertici (*s*,*t*) di un generico grafo G, la loro distanza è definita come segue:

dist(*s*,*t*) = lunghezza del cammino minimo che connette *s* e *t*

dove la lunghezza è misurata in termini del numero di archi necessari per collegare i due vertici.

Se due vertici non sono connessi da alcun cammino, per definizione la loro distanza è posta pari a $+\infty$.

Un *intorno* di raggio k (k>0) di un vertice *s* appartenente al grafo G è quindi semplicemente l'insieme dei vertici di G la cui distanza da *s* sia inferiore o uguale a k.

Quando il numero di vertici e di archi è elevato, la struttura relazionale del grafo può divenire estremamente complessa e diviene necessario individuare procedure in grado di scomporre il grafo in componenti più semplici. L'individuazione delle componenti si basa sulla nozione di *connessione*.

Un grafo è detto *connesso* se, arbitrariamente presi due vertici, esiste sempre un cammino che li congiunge. Figura 5 riporta un esempio di grafo connesso ed uno di grafo non connesso.

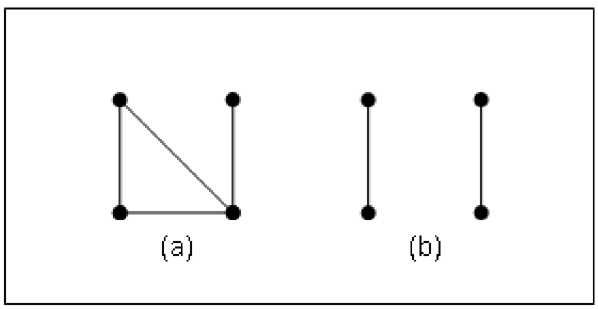

Figura 5. Grafo connesso (a) e grafo non connesso (b).

Una sottografo connesso massimale (cioè un sottografo connesso non contenuto in nessun sottografo connesso) è detto *componente* del grafo.

Un esempio di grafo con due componenti è riportato in Figura 6. Si noti che, in questo caso, il grafo non contiene cicli; un grafo senza cicli è chiamato *foresta* e le sue componenti connesse sono dette *alberi*.

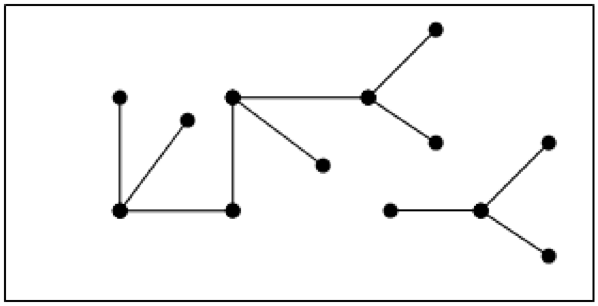

Figura 6. Foresta con due alberi.

Sinora, abbiamo concretizzato l'immagine di un grafo tramite figure comprendenti punti e linee. In effetti, è possibile utilizzare un altro tipo di rappresentazione, meno intuitiva, ma, da un certo punto di vista, più utile per lo sviluppo della teoria. Lo strumento fondamentale, in questo senso, è la cosiddetta *matrice di adiacenza*.

Tale matrice (che indicheremo con A) è definita come segue. Si numerino i vertici del grafo (V,W) e si associ l'elemento A_{ij} della matrice di adiacenza alla coppia ordinata di vertici (i,j). Si ponga:

$$A_{ij} = 1, \text{ se il vertice i è collegato al vertice j}$$

$$A_{ij} = 0, \text{ se il vertice i non è collegato al vertice j.}$$

La matrice di adiacenza è dunque una matrice composta esclusivamente da "0" e "1" e, per grafi non orientati, è simmetrica. Tramite questa matrice, è possibile ottenere interessanti informazioni sul grafo. Per esempio, se introduciamo la seguente operazione di addizione (+), tipica dell'algebra di Boole:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

allora, le potenze A^n della matrice di adiacenza (calcolate con l'operazione di addizione appena definita), individuano le coppie di vertici connesse da cammini di lunghezza n. Per esempio, per $n = 2$, la matrice A^2 ha un valore 1 in corrispondenza dell'elemento (i, j), se e solo se esiste (almeno) un vertice tale per cui A_{is} e A_{sj} sono pari a 1. Nel caso del grafo connesso di figura 5, se ordiniamo i vertici in senso antiorario, la matrice di adiacenza risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e le sue prime potenze "booleane" sono, rispettivamente:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a indicare che gli unici vertici a non poter essere fra loro connessi da un cammino di lunghezza 2 sono i vertici 3 e 4, mentre tutti i vertici sono connessi fra loro da cammini di lunghezza 3.
Vedremo che l'utilizzo di matrici di adiacenza è essenziale per l'analisi della struttura di un grafo e della rete sociale di cui esso è modello.

3.3 Caratterizzazione di un grafo.

In questo paragrafo, diamo brevemente conto di alcuni (tra i possibili) parametri o indici che vengono utilizzati per caratterizzare la struttura topologica locale e globale di una rete o di un grafo. Gli indicatori discussi nel seguito, saranno, insieme ad altri, utilizzati successivamente per caratterizzare alcuni particolari tipi di rete, particolarmente interessanti per i nostri obiettivi.

La struttura locale di un grafo è sostanzialmente determinata dalla struttura di adiacenza di ciascun vertice. Il parametro più importante in questo senso è il cosiddetto *grado* (o *valenza*) del vertice. Il grado *d* di un vertice *s* del grafo è semplicemente definito come il numero di vertici ad esso adiacenti o, equivalentemente, come il numero di archi che si dipartono dal vertice in esame. Nel caso in cui il grafo sia orientato, si usa distinguere tra *grado in entrata* e *grado in uscita*, riferiti, naturalmente, al numero di archi che terminano o che partono dal vertice in questione.

A livello globale, una prima statistica in grado di caratterizzare un grafo G è il *grado medio d*(G) dei suoi vertici, naturalmente definito come rapporto tra la somma dei gradi dei singoli vertici ed il loro numero *n* (detto anche *ordine* del grafo). Naturalmente, da un punto di vista descrittivo è possibile utilizzare statistiche diverse, per sintetizzare la distribuzione dei gradi dei vertici di un grafo. Il massimo e il minimo fra i gradi riscontrabili in una rete o la mediana della loro distribuzione sono tre indicatori globali che possono essere usati in alternativa.

Indipendentemente dalla scelta del tipo di indicatore, una media costruita sulla distribuzione dei gradi è tanto più rappresentativa quanto più la distribuzione è concentrata e poco variabile e quindi, per talune distribuzioni, essa potrebbe essere poco informativa. Si noti, inoltre, che il tipo di informazione che si può ottenere da questi indici è pur sempre derivato da informazioni relative alla struttura locale della rete, cioè all'ampiezza tipica dell'intorno di diametro uno dei vertici.

Una caratterizzazione di tipo più globale, si ha cercando di descrivere sinteticamente la lunghezza dei cammini che connettono vertici diversi del grafo. Avendo in precedenza definito la nozione di distanza tra due vertici, è immediato definire *diametro* di un grafo il massimo tra le distanze tra i suoi vertici (il massimo esiste certamente, trattando noi esclusivamente di grafi di ordine finito). In generale, però, noi siamo interessati a studiare la distribuzione delle distanze tra vertici, cioè la distribuzione delle lunghezze dei cammini minimi tra vertici distinti. Chiaramente, il diametro di un grafo non fornisce particolari indicazioni su tale distribuzione e quindi è necessario trovare altri indicatori.

Mutuando il concetto dalla fisica, si tratta di individuare una possibile misura della distanza caratteristica dei vertici di un grafo. Definire un'entità di questo tipo pone due problemi fondamentali. Da una parte, qualunque statistica si possa costruire su una distribuzione, si tratta in ultima analisi di una scelta convenzionale, il cui valore dipende dall'uso che si intende fare della statistica prescelta e il cui potere rappresentativo dipende fortemente dalla variabilità della distribuzione stessa. Dall'altra, l'aggettivo "caratteristica", mutuato come detto dalla fisica, implicherebbe la costruzione di un modello al cui interno la misura selezionata emerga in modo quasi autoevidente. Con riferimento a un grafo generico, naturalmente tale modello non può essere definito e pertanto permane la difficoltà di individuare i criteri per definire questo tipo di nozione.

La scelta che viene adottata in letteratura è effettivamente di natura convenzionale. Idealmente (Watts, 2004), la scelta più ovvia è quella della media aritmetica delle distanze tra vertici (in realtà, la scelta della media può ampiamente essere messa in discussione), ma a causa della difficoltà di calcolo e di stima di questa grandezza su grafi di dimensione elevata, si preferisce calcolare, per ogni vertice, la media aritmetica delle sue distanze da tutti gli altri vertici e poi prendere, di queste grandezze, la mediana.

Concludiamo questa breve rassegna dei principali indicatori strutturali di un grafo, introducendo un misura della tendenza dei vertici del grafo a formare cluster. Il coefficiente di clusterizzazione cerca di caratterizzare il fatto che vertici appartenenti al medesimo intorno siano a loro volta adiacenti. Si tratta, in sostanza, di una misura della tendenza al costituirsi di clique all'interno del grafo. Formalmente, questo indicatore è definito come segue. Si consideri un vertice *v* e si calcoli il seguente rapporto:

γ_v= (numero di archi nell'intorno di *v*)/(numero massimo teorico di archi nell'intorno di *v*)

(l'intorno è inteso di raggio 1).

Questo numero indica la tendenza alla clusterizzazione dell'intorno del vertice considerato. Il coefficiente di clusterizzazione γ_v del grafo è, infine, ottenuto come media aritmetica dei γ_v sull'insieme dei vertici.

Gli indicatori che abbiamo discusso in questo paragrafo sono solo un piccolo sottoinsieme degli indicatori esistenti e proposti in letteratura, ma sono sufficienti per caratterizzare alcune interessanti topologie di grafi, in particolare i grafi small-world e scale-free, che potrebbero rivestire grande interesse per la comprensione dei comportamenti emergenti nel sistema scolastico, giacché si è riscontrato che tali strutture relazionali sono frequentemente alla base di sistemi dotati di comportamenti complessi (Buchanan, 2004). I prossimi paragrafi saranno dunque dedicati a queste due tipologie di grafi.

3.3.1 Small-world network

Con il termine *small-world network*, si intende una particolare topologia di rete caratterizzata, a livello intuitivo, dal fatto che il diametro della rete sia piccolo, pur in presenza di un numero di archi "relativamente" esiguo e, viceversa, in presenza di un numero di vertici tendenzialmente elevato.

Più chiaramente, consideriamo un grafo connesso avente n vertici (chiediamo la connessione, poiché in caso contrario il diametro del grafo sarebbe infinito, per definizione). Il suo diametro dipende, naturalmente, dalla struttura topologica dei suoi archi e può assumere tutti i valori compresi tra 1 e $n - 1$ (in Figura 7 sono mostrati alcuni esempi nel caso di un grafo connesso con 5 vertici).

Fissato il numero di vertici, intuitivamente, quanto più un grafo contiene archi, cioè quanto più esso assomiglia a una clique, tanto minore sarà il suo diametro; inoltre, è intuitivo anche che il diametro di un grafo diminuisca, se nuovi archi vengono aggiunti. In realtà, ciò avviene se gli archi che vengono inseriti collegano fra loro vertici precedentemente distanti; se, infatti, un arco viene aggiunto a un sottografo già fortemente clusterizzato, il diametro del grafo non subirà significative variazioni.

In realtà, però, un diametro piccolo non è necessariamente dovuto all'esistenza di un numero elevato di archi nel grafo. Si prenda l'esempio di Figura 8. il primo grafo (a) ha un diametro pari a 9 e non è affatto clusterizzato, dato che due vertici adiacenti ad uno stesso vertice non sono fra loro connessi da alcun arco. Se ora, aggiungiamo due archi come nel grafo (b), il diametro si riduce a 5, senza che emergano clique al suo interno.

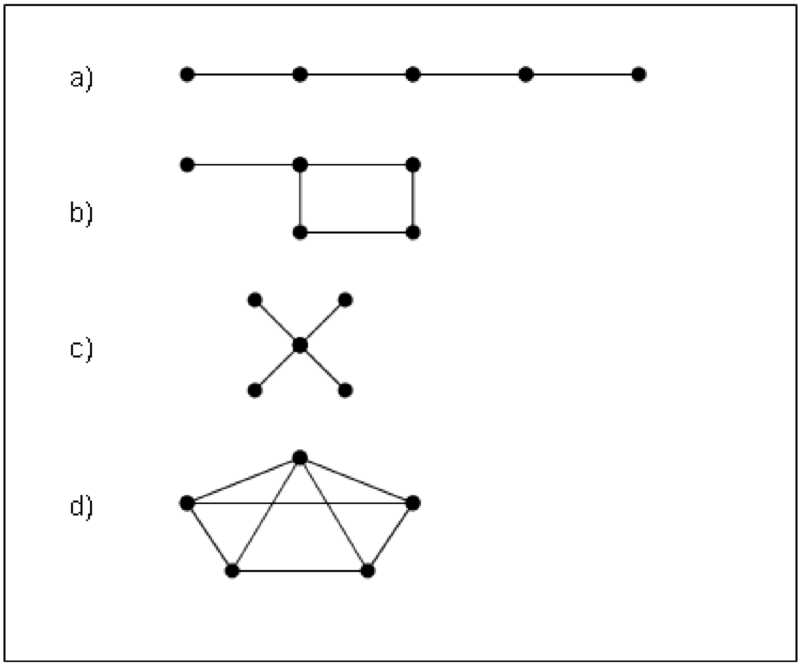

Figura 7. Grafi connessi: diam(a) = 4, diam(b) = 3, diam(c) = 2, diam(d) = 1.

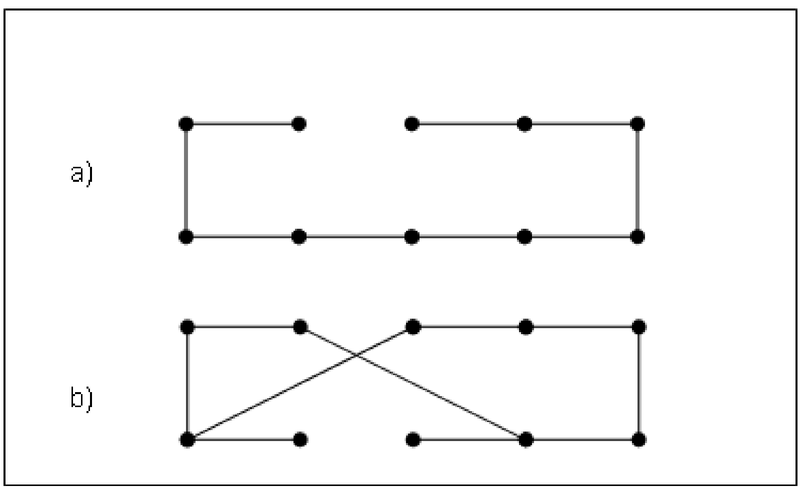

Figura 8.

Si noti che il numero di archi nel grafo (b) è pari a 10, mentre il numero massimo di archi che è possibile inserire in un grafo non orientato con 10 vertici è pari a 45. Si vede, cioè, che con un numero relativamente piccolo di archi è possibile "abbattere" il diametro del grafo originario. Dunque, un diametro piccolo pur in un grafo con molti vertici non implica né l'esistenza di molti archi, né l'esistenza di un'elevata clusterizzazione.

Si osservi ora quanto segue. Se il numero di archi di un grafo non è elevato (rispetto al numero massimo possibile) si è portati a pensare che esista un trade-off tra clusterizzazione (misurata, per esempio, con l'indicatore descritto in precedenza) e piccolezza del diametro del grafo; in un certo senso, se gli archi a disposizione vengono utilizzati per creare sottografi molto connessi al loro interno, alcuni vertici, appartenenti a cluster differenti, rimarranno necessariamente distanti. Viceversa, se gli archi vengono utilizzati per connettere fra loro i vertici che altrimenti sarebbero distanti, non vi sarà la possibilità di creare cluster di vertici (un cluster non contribuisce ad abbassare il diametro, giacché connette tra loro vertici che sono già indirettamente connessi con cammini brevi).

Questa seconda situazione è tipica, per esempio, dei cosiddetti grafi casuali (Bollobas, 2001). Si consideri un grafo come quello in Figura 8a e, casualmente, si scelga un arco, lo si stacchi da uno dei vertici a cui è connesso e lo si connetta casualmente ad uno degli altri vertici (questa operazione è nota, in letteratura, come *re-wiring*. Si noti che il re-wiring non altera il numero di archi presenti nel grafo). Procedendo in questo modo, ed iterando l'operazione, si ottengono grafi assai poco clusterizzati e con diametri piccoli.

Il problema teorico da cui nasce l'interesse per le topologie small-world è precisamente quello di stabilire se sia possibile individuare grafi il cui comportamento sia, in qualche senso, intermedio tra quello di grafi fortemente clusterizzati e quello di grafi casuali.

Le prime evidenze formali di questa possibilità vennero pubblicate in un breve articolo del 1998 (Watts&Strogatz, 1998), nel quale si mostrava come fosse possibile ottenere grafi con un numero di archi relativamente piccolo, con un coefficiente di clusterizzazione elevato e, contemporaneamente, con un diametro piccolo.

Grafi di questo tipo sono stati chiamati "mondo piccolo", perché consentono di spiegare, almeno concettualmente, il fatto sperimentato da tutti, per il quale pur essendo la cerchia di amici e conoscenti relativamente piccola, non è infrequente incontrare persone connesse a noi da amicizie o conoscenze indirette (il termine small-world, tecnicamente, sorge in riferimento ad un famoso esperimento sociologico, svolto negli anni '60, nel quale un ricercatore preparò un certo numero di lettere, indirizzate a persone residenti in Massachusets, e le consegnò a persone residenti in altri stati USA, con la richiesta di farle pervenire ai destinatari non spedendole direttamente, ma inviandole a qualcuno di loro conoscenza che essi ritenessero "socialmente" più vicino al destinatario finale e invitando tale persona a fare lo stesso a sua volta. Una parte delle lettere andò persa, ma altre giunsero a destinazione e si notò che il numero tipico di passi necessari perché la lettera giungesse al suo destinatario finale era 6. Da ciò derivò l'idea che con 6 contatti intermedi fosse possibile connettere due persone qualsiasi nel mondo).

Tecnicamente, dunque, possiamo definire small-world qualunque grafo che abbia coefficiente di clusterizzazione elevato e diametro piccolo. Naturalmente, stabilire cosa si intenda per "elevato" e per "piccolo" non è semplice da determinare. Per rendere più precisa l'idea su cui si fonda questa nozione, si osservi la sottostante Figura 9, tratta dall'articolo originario di Watts e Strogatz (Watts&Strogatz, 1998).

Essa riporta, per una famiglia di grafi casuali con 1000 vertici indicizzata da un parametro *p* (il cui significato sarà chiaro tra breve), l'andamento dei rapporti dell'indice di clusterizzazione (in figura, indicato con *C*) e della lunghezza caratteristica (in figura, indicata con *L*), rispettivamente rapportati al coefficiente di clusterizzazione e alla lunghezza caratteristica di un grafo regolare (cioè in cui ogni vertice ha lo stesso ordine) con un numero di vertici pari a 1000. Tale parametro, che varia tra 0 e 1, determina la probabilità di effettuare il re-wiring di un arco appartenente al grafo di partenza i cui vertici, nell'esempio, hanno ciascuno ordine 10. In altri termini, ogni arco del grafo regolare di partenza viene sottoposto a re-wiring con una probabilità pari a *p*, senza ammettere archi multipli tra due vertici. In questo modo, si genera una successione di grafi casuali con coefficienti di clusterizzazione e lunghezze caratteristiche diversi.

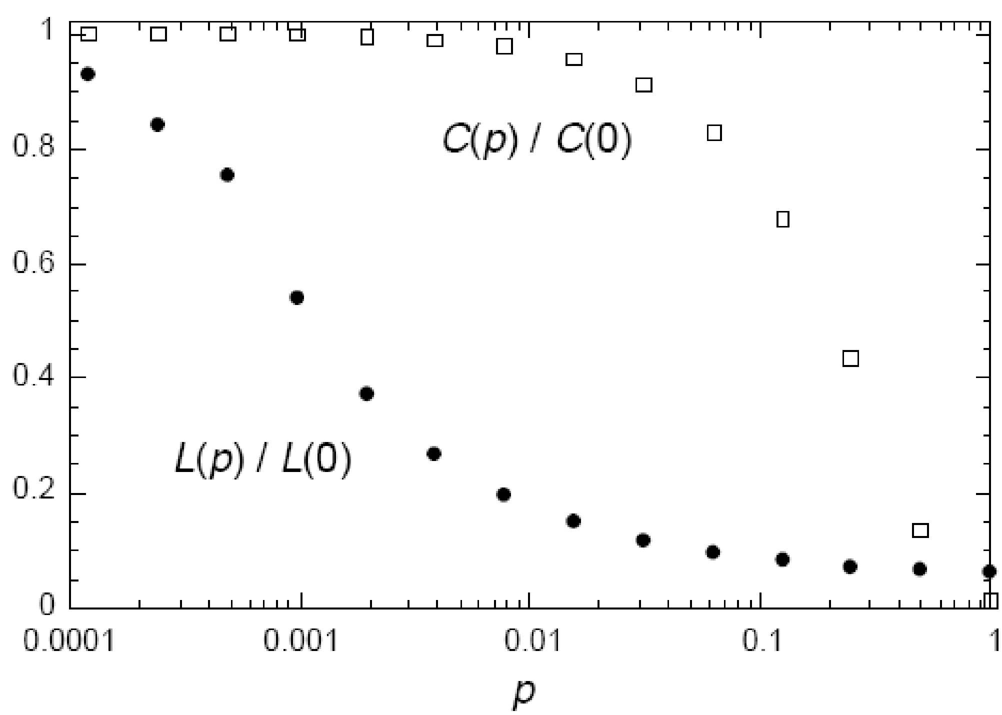

Figura 9.

Ciò che si osserva in figura è che, al variare del parametro *p* (si noti che esso è espresso in scala logaritmica), il rapporto dei coefficienti di clusterizzazione rimane inizialmente quasi costante, mentre la lunghezza caratteristica si abbassa notevolmente. Questo intervallo di probabilità corrisponde, in una terminologia termodinamica, alla fase "small-world", mentre successivamente, quando il valore di *p* cresce, si entra nella fase "grafo casuale", dove sia coefficiente di clusterizzazione che lunghezza caratteristica sono piccole, come avviene, appunto, per i grafi casuali.

Da questo esempio si vede come la presenza di una frazione piccola (la frazione di archi oggetto di re-wiring è approssimativamente pari al parametro *p*) di archi che congiungano vertici appartenenti, inizialmente, a cluster differenti possa ridurre in maniera molto sensibile il diametro del grafo, senza modificare sensibilmente il coefficiente di clusterizzazione.

Per avere un'idea dell'importanza di questi archi, si consideri il problema della ricerca di lavoro, mediante "passa-parola". Siccome, tendenzialmente, due persone che abbiano in comune un amico sono fra loro amiche, far circolare la notizia della ricerca di un'occupazione comunicandola ad un amico o a più amici non cambia l'ampiezza del contesto cui la richiesta giungerà (il cluster di amici, per l'appunto). Ma se un elemento della cerchia di amici ha anche solo un legame di conoscenza con una persona che appartenga ad una realtà sociale differente, allora la ricerca del lavoro può giungere ad un contesto molto più ampio. Si vede, così, come l'efficienza della diffusione delle informazioni in una rete, possa dipendere anche da legami deboli (nell'esempio, di conoscenza e non di amicizia) e da individui che abbiano posizioni relazionali particolari, rispetto al resto della rete, in grado di modificare radicalmente la topologia del grafo, almeno dal punto di vista dei meccanismi di comunicazione.

Per queste ragioni, il concetto di rete small-world ha avuto un'ampia risonanza nel panorama scientifico (Buchanan 2004) e ha attratto numerose ricerche, soprattutto stimolando l'attenzione dei fisici teorici (Dorogovisev, 2000, 2002; Davidson 2002; Schwartz, 2002), che hanno trovato analogie tra i modelli della meccanica statistica e la "transizione di fase" tra topologie di un grafo, caratteristica dell'emergere di una struttura small-world. Inoltre, diversi studi, tratti da ambiti differenti, hanno mostrato come le topologie small-world siano diffuse in numerose reti esistenti nella realtà e si stanno moltiplicando gli studi sulla diffusione dell'informazione (es. epidemie o innovazioni) su reti di questa natura (Schwartz, 2002; Newman, 2002). Per esempio, fenomeni di sincronizzazione collettiva fra agenti distribuiti spazialmente e che interagiscono solo con i propri vicini, possono essere spiegati ipotizzando l'esistenza di pochi agenti, distribuiti fra gli altri, dotati di una capacità di interazione di ampiezza maggiore. Topologicamente, alla base dell'emergere di questo comportamento collettivo vi sarebbe dunque una rete small-world (Buchanan, 2004). L'esistenza di legami di questo tipo può anche spiegare la diffusione di epidemie o di virus (sia nel caso di popolazioni umane che, per esempio, nel caso di virus informatici) o la diffusione delle innovazioni in campo economico. Non è quindi difficile ipotizzare, anche all'interno del sistema scolastico, l'esistenza di flussi informativi (relativi ad aspetti culturali, didattici, metodologici…) che hanno un impatto sulle prestazioni del sistema e che possono diffondersi più o meno facilmente, se la topologia delle relazioni della rete sociale scolastica è di tipo small-world.

3.3.2 Scale-free network

Nel precedente paragrafo, dedicato alle reti piccolo mondo, abbiamo introdotto a livello intuitivo la nozione di grafo casuale e si è mostrato come una rete small-world possa essere vista come una rete ottenuta "casualizzando" un grafo regolare, ma senza rendere eccessiva la componente di re-wiring.

Vi sono altre reti che hanno interessanti caratteristiche topologiche e che possono essere ottenute in modo analogo a quanto fatto per le reti small-world. L'aspetto interessante è che dalla presenza in un grafo del tipo di struttura topologica che presenteremo poco oltre, si può inferire l'esistenza di particolari meccanismi casuali di formazione della rete e quindi ottenere indicazioni per la costruzione di modelli che riproducano i meccanismi in essere nel sistema in esame.

Si consideri un grafo generico e si misuri, per ogni vertice, il corrispondente grado, cioè (nel caso di un grafo non orientato) il numero di archi che da esso si dipartono. Per caratterizzare globalmente il grafo, si può considerare la distribuzione dei gradi dei suoi vertici. Solitamente, la distribuzione degli ordini dei vertici che si ottiene per un grafo generico presenta un coda leggera; essa, cioè, tende ad abbassarsi velocemente, in modo esponenziale, all'aumentare dell'ordine dei vertici. Tuttavia, vi sono reti in cui tale coda è, come si usa dire, pesante. L'andamento della funzione, per valori grandi delle ascisse, sembra tendere a zero seguendo una legge di potenza polinomiale e non una legge di decadimento esponenziale.

Per esempio, se si rappresentano porzioni del World Wide Web come grafi nei quali gli archi siano rappresentati dai link fra pagine web, si ritrova questo tipo di andamento, a causa della presenza di una frazione non banale di siti verso cui convergono molti link da altre pagine.

L'interesse per lo studio delle condizioni sotto le quali la distribuzione dei vertici passi da un decadimento esponenziale ad uno con legge di potenza nasce da alcune analogie con i modelli fisici della termodinamica statistica delle transizioni di fase. Qui l'esistenza di correlazioni che decrescano con legge di potenza indica l'instaurarsi, nel sistema, di interazioni su tutte le scale di lunghezza, formalmente sino all'infinito, con il conseguente emergere di ordinamenti macroscopici (ciò avviene, appunto, in occasione delle cosiddette transizioni di fase del secondo ordine, come nel caso del punto triplo di coesistenza delle fasi liquide, solide e gassose di un liquido, in coincidenza del quale si sviluppano correlazioni a lungo raggio tra le molecole del fluido che, per esempio, danno luogo al fenomeno dell'opalescenza critica, per cui il liquido assume un aspetto lattiginoso). Formalmente, l'esistenza di interazioni su tutte le lunghezze corrisponde al fatto che nel sistema non esista una scala di osservazione tipica, cioè una lunghezza caratteristica. Da questa circostanza, deriva l'utilizzo del termine scale-free. A differenza delle transizioni di fase fisiche, però, non si riscontra, nel campo delle reti sociali o naturali, l'esistenza di andamenti universali, cioè di esponenti comuni che governino il decadimento a zero della distribuzione dei vertici (Goh et al, 2002). Nello studio delle transizioni di fase del secondo ordine, invece, si è prima sperimentalmente scoperto e poi teoricamente giustificato (grazie al cosiddetto Gruppo di Rinormalizzazione) il fatto che gli andamenti delle funzioni termodinamiche sono caratterizzati da esponenti che hanno carattere universale.

La ragione dell'interesse per le reti scale-free non è però di natura teorica, ma è legata al fatto che l'esistenza di una coda pesante nella distribuzione dei vertici può dare interessanti indicazioni sui meccanismi di formazione della rete.

Per fissare le idee, si consideri un insieme di vertici anche non connessi fra loro e si generino in successione gli archi del grafo, mediante un meccanismo casuale che, per ogni vertice, scelga casualmente il vertice con il quale stabilire la connessione. Si supponga, in particolare, che la probabilità di stabilire l'arco con un certo vertice sia tanto maggiore quanto più grande è il numero di vertici già ad esso collegati. Si può verificare (Barabasi, 1999, 2002) che con schemi di connessione casuale di questo tipo si generano grafi caratterizzati dalla presenza di code pesanti nella distribuzione dei vertici, cioè si generano grafi scale-free.

Questo tipo di meccanismo di generazione delle connessioni tra vertici va sotto il nome di *preferential attachment*, giacché gli archi vengono stabiliti con probabilità maggiore verso vertici già ricchi di connessioni.

Il preferential attachment è verosimilmente alla base della struttura di alcuni fenomeni e di alcune reti riscontrate nella realtà sociale ed economica. Un aeroporto che voglia aumentare il proprio traffico, cercherà di connettersi con aeroporti ricchi di traffico e solo quando tali terminali fossero eccessivamente congestionati, verranno cercate connessioni con altri aeroporti, generando nuovi terminali ricchi di connessioni e così via. Questi nodi, particolarmente ricchi di connessioni, sono denominati *hub*. L'esistenza di hub rappresenta una delle caratteristiche tipiche delle reti scale-free e si può dimostrare come la sua presenza comporti, all'interno del grafo, la comparsa di una grossa componente connessa, chiamata *componente gigante*.

Di conseguenza, quando ci si trovi dinnanzi a un grafo che presenti hub, componenti connesse giganti e distribuzioni degli ordini dei vertici con code pesanti, si può ipotizzare l'esistenza di un meccanismo di preferential attachment, che, spiegando la topologia del grafo, può anche fornire indicazioni per la costruzione di un modello dei meccanismi che hanno dato origine al grafo stesso (Aldridge, 2005).

4 Metodi algebrici per la rappresentazione strutturale di una rete sociale

I modelli di reti sociali desumibili nell'ambito della teoria dei grafi "classica" si pongono l'obiettivo di caratterizzare la struttura della rete in termini topologici, attraverso un insieme di statistiche che "catturino" e rappresentino aspetti particolarmente significativi del grafo.

Si ritrova, in questo approccio, l'usuale problema del passaggio dal locale al globale (cioè da un livello microscopico ad uno macroscopico), per cui si caratterizzano innanzitutto i singoli vertici e i singoli cammini tra vertici, per poi costruire la distribuzione statistica dei valori così ottenuti e cercare uno o più valori di sintesi da associare al grafo nel suo insieme.

Questo procedimento, tipico della statistica (e forse inevitabile, da un certo punto di vista), comporta delle limitazioni. Innanzitutto, concettualmente, esso non permette di rappresentare la struttura del grafo, ma solo un insieme di caratteristiche globali che sono certamente legate alla struttura della rete, ma non in modo biunivoco. Qualunque indicatore statistico di posizione (media aritmetica, mediana…) è tanto più rappresentativo della distribuzione, quanto più la distribuzione è concentrata. E naturalmente, diverse distribuzioni possono condurre alle medesime statistiche sintetiche. Occorre anche notare che ogniqualvolta si utilizzino entità non monodimensionali (cioè una pluralità di indicatori) per sintetizzare un fenomeno, si perde la possibilità di costruire ordinamenti significativi e quindi diviene più difficile impostare un confronto tra strutture (per esempio, nel caso in cui si voglia studiare il mutamento temporale di una struttura sociale).

In questo e nei prossimi paragrafi, proponiamo un punto di vista differente sulla rappresentazione strutturale di un grafo. Si tratta di un insieme di metodi sorti in ambito sociologico e orientati, in particolare, allo studio della struttura relazionale delle reti sociali. Nonostante la loro provenienza, questi metodi sono fortemente matematici e sono basati sull'utilizzo di strutture algebriche astratte e sul concetto matematico di *rappresentazione*.

L'idea portante è quella di associare ad un grafo un insieme di oggetti formali per i quali sia disponibile un calcolo, cioè un insieme di regole note di composizione, in modo che le elaborazioni eseguite su tali oggetti esprimano risultati che abbiano un significato a livello del grafo di partenza. Il punto essenziale è dunque che la relazione che al grafo associa l'insieme di oggetti formali sia costruita in modo che la struttura del grafo sia effettivamente rintracciabile nell'insieme di arrivo e in questo sta, in sostanza, il concetto di rappresentazione. Questo approccio, che qui potremmo chiamare algebrico, ha il vantaggio di rappresentare direttamente la complessità relazionale del grafo, senza ricorrere a indicatori sintetici che, come abbiamo già discusso, rischiano di essere poco informativi.

Trattandosi di un approccio meno noto e che meno risonanza ha avuto rispetto ai modelli di reti piccolo mondo e scale-free, tratteremo queste tecniche con un dettaglio formale maggiore, rispetto a quanto fatto in precedenza, soprattutto con l'intento di comunicare il loro valore concettuale. Ci limiteremo, comunque, alla basi della teoria, giacché essa si dirama in numerosi aspetti tecnicamente piuttosto complessi. Questa scelta, comunque, non limiterà il valore della nostra esposizione, perché le strutture concettuali rilevanti per noi sono già presenti nell'articolazione che proponiamo.

Premettiamo alla descrizione dei metodi algebrici per la descrizione strutturale di un grafo, una discussione introduttiva sulle principali strutture algebriche e sulla nozione di rappresentazione, che formano la base concettuale di tutto lo sviluppo metodologico successivo.

4.1 Strutture algebriche

Sia *V* un insieme i cui elementi abbiano natura arbitraria e supponiamo che su questo insieme siano stabilite una o più relazioni o che sugli elementi dell'insieme sia possibile effettuare delle operazioni di qualche natura. Se le relazioni o le operazioni soddisfano alcuni insiemi di proprietà che ne garantiscano la consistenza concettuale (in un senso che verrà specificato), allora *V*, con le relazioni o le operazioni su di esso definite, può essere identificato come un oggetto algebrico.

Naturalmente, esistono relazioni diverse ed operazioni differenti, definite da insiemi alternativi di assiomi. Queste differenze danno vita, a loro volta, a differenti strutture algebriche, il cui studio è proprio di quella parte della matematica che viene chiamata *algebra astratta*. E' infatti proprio dell'algebra astratta studiare le proprietà di insiemi con relazioni ed operazioni, prescindendo completamente dalla natura dell'insieme, basandosi esclusivamente sulle proprietà formali delle relazioni e delle operazioni su di esso definite.

Diamo ora alcuni esempi di strutture algebriche, alcune delle quali saranno direttamente utilizzate per lo studio delle reti sociali.

Scelto un insieme astratto *V*, supponiamo che sulle coppie ordinate di elementi dell'insieme sia definita un'operazione binaria (cioè, appunto, definita su coppie di elementi) che indichiamo con • e che chiamiamo *moltiplicazione*:

$$\bullet : V \times V \to V$$
$$: (v,w) \to v \bullet w.$$

Se chiediamo che l'insieme *V* sia chiuso rispetto all'operazione di moltiplicazione (cioè se chiediamo che il prodotto di due elementi di *V* sia ancora in *V*) e che la moltiplicazione sia associativa, cioè che valga

$$v \bullet (w \bullet z) = (v \bullet w) \bullet z$$

comunque scelti gli elementi *v, w*, e *z* in *V* (per cui, nella precedente operazione, le parentesi possono essere omesse), allora lo coppia *(V, •)* è detta *semigruppo*. Per semplicità, laddove non ci siano ambiguità, ometteremo il segno di moltiplicazione e scriveremo semplicemente *uv* in luogo di *u • v.*

La struttura di semigruppo è una delle più semplici, ma è anche di importanza fondamentale e si ritrova in ambiti molto diversi. Verrà utilizzata nei prossimi paragrafi per la descrizione della struttura relazionale di un grafo, ma si ritrova, per esempio, in fisica teorica, nel processo di rinormalizzazione della teoria dei campi (il Gruppo di Rinormalizzazione di Wilson, che è in realtà un semigruppo, ha un ruolo fondamentale nello studio delle transizioni di fase critiche), o in analisi matematica, nello studio dei cosiddetti *semigruppi a un parametro*, nell'ambito dello studio delle equazioni differenziali di evoluzione temporale.

Se un semigruppo ammette *unità*, cioè un elemento *e* tale che

$$ew = we = w.$$

per ogni elemento *w* di *V*, allora il semigruppo è detto *monoide.* Un esempio fondamentale di monoide è fornito dall'insieme delle applicazioni di un insieme in sé, dove l'applicazione identica *Id*

$$Id(v) = v$$

rappresenta l'identità.

Per dare un'idea del modo di procedere dell'algebra astratta, si osservi che dalla definizione di unità che abbiamo appena dato, segue che essa è unica; infatti, se esistesse un elemento u di V tale che $uw = w$, per ogni w in V, allora avremmo

$$u = ue = e$$

e quindi $u = e$.

Più in generale, si può dimostrare che esistono monoidi con unità sinistre (cioè dove vale $ew = w$, ma non $we = w$, per ogni w in V) o con unità destre, ma se in un monoide esiste sia un'unità destra che un'unità sinistra, allora queste coincidono.

Tutte queste proprietà, per quanto semplici, sono ottenute senza alcun riferimento alla natura degli oggetti in gioco e in ciò sta la potenza di questi metodi che, se da una parte sono astratti, dall'altra permettono di cogliere le strutture essenziali che determinano le proprietà di strutture complesse.

Se V è un insieme finito, la struttura di un semigruppo (monoide) è completamente specificata dalla *tabella di moltiplicazione* (o *tabella di Cayley*) del semigruppo (monoide).

Sia n la cardinalità di V e si consideri una tabella $(n+1)x(n+1)$ del tipo seguente

	e	*v1*	…	…	*vn*
e	x	x	x	x	x
v1	x	x	x	x	x
…	x	x	x	x	x
…	x	x	x	x	x
vn	x	x	x	x	x

dove nella prima colonna e nella prima riga sono elencati gli elementi dell'insieme in un ordine arbitrario, ma fissato (tipicamente con l'unità in prima posizione) e dove nelle singole celle vi è il prodotto dei corrispondenti elementi di riga e di colonna. La tabella di moltiplicazione equivale ad assegnare l'operazione di moltiplicazione e ciò, insieme alle proprietà formali di cui essa gode, è quanto è sufficiente per definire la struttura algebrica.

Una struttura di importanza fondamentale è quella di *gruppo*, che ha enorme rilevanza in tutta la matematica e nella fisica, teorica e applicata.

Un gruppo è un monoide con unità in cui ogni elemento ammette inverso. In altri termini, si chiede che per ogni v in V, esista u in V tale che

$$uv = vu = e$$

Usualmente, l'inverso di v è indicato con v^{-1}.

In realtà, si può dimostrare che basta definire l'inverso solo a destra o solo a sinistra per verificare la precedente definizione. Essendo un monoide, anche la struttura di un gruppo finito è completamente specificata dalla sua tabella di moltiplicazione. Si noti poi che, in generale, la moltiplicazione non è commutativa (non si chiede tale proprietà né per i semigruppi, né per i monoidi). Qualora, invece, essa lo fosse allora la struttura in questione, qui un gruppo, sarebbe detta *commutativa o abeliana*.

L'esempio più classico di utilizzo di gruppi è nello studio delle simmetrie di una figura geometrica. Si consideri, per semplicità, una figura piana, che è un sottoinsieme opportuno del piano. Tale sottoinsieme è simmetrico rispetto a una trasformazione geometrica T se, sottoposto a T, esso rimane identico a se stesso, cioè se esso è invariante rispetto all'azione della trasformazione. Per esempio, un quadrato è invariante rispetto a rotazioni di 90°, 180°, 270° e 360° o per riflessioni rispetto alle proprie diagonali o ai propri assi. Si verifica facilmente che l'insieme delle trasformazioni del piano che lasciano invariato un quadrato forma un gruppo. La stessa cosa vale per un rettangolo, che però è invariante rispetto ad un numero inferiore di trasformazioni, che danno vita ad un gruppo abeliano di ordine 4, noto come *gruppo di Klein*.

Gli esempi di strutture algebriche che abbiamo dato sinora sono tutte caratterizzate dalla presenza di una sola operazione binaria, definita tra elementi dell'insieme. Naturalmente è possibile definire strutture più complesse, dove sono presenti più operazioni contemporaneamente.

Ad esempio, se in un monoide si introduce, oltre alla moltiplicazione, anche un'operazione binaria associativa e commutativa, che viene usualmente detta *addizione* e viene pertanto indicata con +, e se si chiede che ogni elemento ammetta inverso rispetto all'addizione e che valgano le proprietà distributive tra addizione e moltiplicazione, si ottiene la nozione fondamentale di *anello*. Se nell'anello esiste un elemento neutro per l'addizione (cioè l'analogo dell'unità per la moltiplicazione), l'anello è detto *con unità*. Per esempio, l'insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti reali è un anello con unità, dove l'unità è data dal polinomio degenere 0.

Un anello in cui esista un inverso rispetto alla moltiplicazione per ogni elemento diverso dall'elemento neutro per l'addizione è detto *corpo* e un corpo in cui la moltiplicazione sia commutativa è detto *campo*. Il campo reale e il campo complesso sono i due più importanti esempi di tali strutture.

In questo modo, si vede come sotto tutte le fondamentali strutture della matematica vi siano essenzialmente strutture algebriche astratte. Ovviamente, è possibile introdurre ulteriori operazioni, generando strutture più complesse che vanno sotto il nome generico di algebre.

L'insieme delle matrici a entrate in un campo è un importante esempio di algebra. Così, anche l'insieme dei tensori, cioè dei funzionali multilineari su uno spazio vettoriale e sul suo duale, è un esempio di algebra (precisamente di algebra graduata), contenendo le operazioni (opportunamente definite) di somma, moltiplicazione e *contrazione*. Ancora, nell'ambito dei tensori, è molto rilevante la nozione di *algebra esterna* (*algebra di Grassman*), definita mediante una particolare nozione di prodotto, (noto appunto come prodotto esterno).

Le strutture algebriche possono poi essere, in un certo senso, combinate fra loro, per generare strutture più complesse. L'esempio più famoso in questo senso è quello degli spazi vettoriali su un campo, i cui elementi possono essere sommati fra loro e moltiplicati per un elemento del campo sottostante. Si noti, tra l'altro, che spesso gli stessi insiemi possono essere visti come strutture algebriche differenti. Per esempio, l'insieme delle matrici su un campo forma un'algebra, come abbiamo detto, ma anche uno spazio vettoriale.

Oltre alla presenza di operazioni binarie, le strutture algebriche possono avere al proprio interno relazioni di natura differente. Un caso particolarmente importante, per l'oggetto del presente lavoro, è quello in cui sull'insieme considerato sia presente una relazione d'ordine parziale.

Una *relazione d'ordine parziale* R su un insieme V è una relazione che gode delle seguenti proprietà:

$$vRv \qquad \text{(riflessività)}$$

$$vRw,\ wRv \rightarrow v = w \quad \text{(antisimmetria)}$$

$$vRw,\ wRz \rightarrow vRz \quad \text{(transitività)}$$

per ogni *v, w* e *z* appartenenti a *V*.

Usualmente, la relazione d'ordine parziale viene indicata con ≤.

L'attributo "parziale" deriva dal fatto che due qualsiasi elementi dell'insieme potrebbero non essere confrontabili, cioè non necessariamente ordinabili. Per esempio, se consideriamo la famiglia dei sottoinsiemi di un insieme dato, possiamo stabilire una relazione d'ordine mediante l'operatore di inclusione: un sottoinsieme precede un altro, se è in esso contenuto; tuttavia, due insiemi non contenuti l'uno nell'altro non possono essere ordinati e quindi non sono confrontabili. In generale, quindi, non si può stabilire un ordinamento totale, ma solo un ordinamento parziale.

Se in un insieme tutti gli elementi possono essere ordinati, allora l'insieme è detto *totalmente ordinato*. Chiaramente i sottoinsiemi di elementi ordinabili di un insieme parzialmente ordinato formano, a loro volta, dei sottoinsiemi totalmente ordinati. Tali sottoinsiemi sono detti *catene*, perché tutti i loro elementi possono essere posti in una successione ordinata.

In un insieme parzialmente ordinato (o, come si usa dire, *poset*) ha interesse definire la nozione di *copertura*. Si dice che *v* copre *w*, se *wRv* e non esiste alcun *u* in *V* tale che *wRu* e *uRv*.

E' molto utile poter rappresentare in maniera sintetica e percettivamente efficace la struttura di ordinamento parziale di un insieme. A questo fine, conviene introdurre la nozione di *diagramma di Hasse*.

Questo diagramma è costruito come un grafo in cui:

1. i vertici corrispondono agli elementi dell'insieme;
2. i vertici vengono disposti in modo che se *uRv*, il vertice corrispondente a *u* sia più in basso del vertice corrispondente a *v*;
3. se e solo se *v* copre *u* si inserisce un arco tra i due vertici corrispondenti.

La costruzione di un diagramma di Hasse di un insieme finito parzialmente ordinato è molto semplice e le figure che seguono ne illustrano due casi per insiemi di cardinalità piccola (meno semplice, in realtà, è scegliere la forma grafica più conveniente e chiara, dato che esistono diverse modi concreti di disegnare il diagramma). Si consideri innanzitutto la collezione dei sottoinsiemi dell'insieme {1,2,3} (cioè il suo insieme delle parti), scegliendo come relazione d'ordine parziale "essere sottoinsieme di". L'ordinamento che ne consegue è parziale, giacché, per esempio, i sottoinsiemi {1,2} e {2,3} non sono in relazione fra loro (nessuno dei due è sottoinsieme dell'altro), mentre sottoinsiemi come {1,3} e {1}, sono ordinabili. Il diagramma di Hasse è rapidamente ottenuto ed è riportato in Figura 10 (tratta da PlanetMath.org):

Si noti come, correttamente, il sottoinsieme {1, 2, 3} sia posto al di sopra di tutti gli altri (è evidentemente l'elemento massimale rispetto alla relazione d'ordine prescelta), mentre l'insieme vuoto è posto più in basso di tutti gli altri, essendo sottoinsieme di qualunque altro elemento dell'insieme delle parti. Seguendo tutti gli archi del grafo, dall'alto in basso, si possono riottenere tutte le relazioni di ordine parziale tra gli elementi dell'insieme delle parti, a verifica del fatto che dalla copertura si può risalire alla struttura d'ordinamento, grazie alla proprietà transitiva.

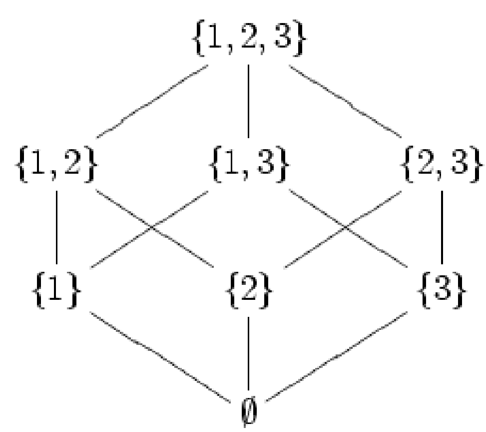

Figura 10. Digramma di Hasse per l'insieme delle parti di {1,2,3}.

Come ulteriore esempio, si consideri l'insieme dei divisori di 60 (cioè l'insieme di numeri interi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60). Esso è un insieme parzialmente ordinato rispetto alla relazione "essere divisore di" e il suo diagramma di Hasse è riportato in Figura 11 (tratta da Wikipedia).

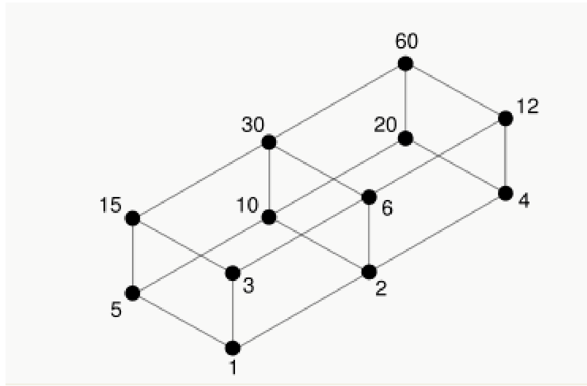

Figura 11. Diagramma di Hasse dell'insieme dei divisori di 60.

Chiaramente, il diagramma di Hasse di un insieme totalmente ordinato si riduce ad una catena lineare di vertici collegati in successione da un arco e disposti dall'alto in basso.

I diagrammi di Hasse rappresentano lo "scheletro" dell'ordinamento parziale di un insieme, nel senso che la relazione d'ordine tra due elementi si può ricostruire dal diagramma percorrendo dall'alto in basso i suoi archi. Tecnicamente, ciò deriva dal fatto che la relazione d'ordine parziale sull'insieme è ottenuta dalla chiusura transitiva della relazione di copertura, sulla quale, appunto, è basato il diagramma di Hasse.

Strettamente connessa alla nozione di insieme parzialmente ordinato è la struttura algebrica di *reticolo*.

Prima di dare la definizione formale di questa nozione, occorre definire cosa si intenda per estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme di un insieme parzialmente ordinato. Sia dunque V un poset e W un suo sottoinsieme. Si consideri, se esiste, il sottoinsieme S di elementi di V tale per cui wRs per ogni w in W e s in S (cioè si consideri l'insieme degli elementi di V maggiori o uguali di ciascun elemento di W). Se esiste un elemento s^* tale che wRs^* e s^*Rs per ogni s in S, allora s^* è detto *estremo superiore* di W. Si dimostra facilmente che l'estremo superiore, se esiste, è unico. Inoltre, l'estremo superiore di W può anche appartenere a W stesso, nel qual caso coincide con il massimo di W, cioè con un elemento w^* in W tale che wRw^* per ogni w in W.

In maniera analoga possiamo definire l'estremo inferiore di W. Si consideri in questo caso, se esiste, il sottoinsieme I di elementi di V tale per cui iRw per ogni w in W e i in I (cioè si consideri l'insieme degli elementi di *V* minori o uguali di ciascun elemento di *W*). Se esiste un elemento *i** tale che *i*Rw* e *iRi** per ogni *i* in *I*, allora *i** è detto *estremo inferiore* di *W*. Si dimostra anche in questo caso che l'estremo inferiore, se esiste, è unico. L'estremo inferiore di *W* può anche appartenere a *W* stesso, nel qual caso esso coincide con il minimo di *W*, cioè con un elemento *w** in *W* tale che *w*Rw* per ogni *w* in *W*.

Possiamo adesso definire un *reticolo*, come un insieme parzialmente ordinato, in cui ogni coppia di elementi ammette estremo superiore ed estremo inferiore. La definizione sembra banale, se riferita, per esempio, alle coppie di numeri reali, per le quali l'estremo inferiore coincide con il minimo della coppia e l'estremo superiore con il massimo. In realtà, la struttura di reticolo è una delle strutture fondamentali della matematica e di essa si possono dare molti esempi non banali. Si consideri, per fissare le idee, l'insieme delle funzioni su un intervallo reale, con la relazione d'ordine parziale f ≤ g se f(x) ≤ g(x) per ogni x appartenente all'intervallo considerato. Una coppia arbitraria di funzioni può non ammettere estremo superiore ed estremo inferiore, per esempio se le due funzioni si intersecano e non ve ne è una che domini l'altra.

Per completezza, citiamo il fatto che un reticolo può anche essere definito in termini astratti, come una terna composta da un insieme dotato di due operazioni binarie idempotenti, commutative, associative e che soddisfino la legge di assorbimento (Birkhoff, 1967). Si può facilmente verificare che le due definizioni, pur apparentemente così differenti, sono del tutto equivalenti fra loro, nel senso che partendo da un poset con le proprietà di un reticolo è possibile definire le operazioni binarie sopra accennate e partendo dall'esistenza di tali operazioni, è possibile definire un poset con le proprietà di un reticolo. Le due definizioni sono equivalenti, perché le operazioni binarie derivate dal poset, se prese come pre-definite sull'insieme, inducono l'ordinamento parziale da cui esse sono state derivate.

In generale, poi, è possibile avere strutture algebriche che contengano allo stesso tempo operazioni binarie e ordinamenti parziali. L'esempio fondamentale per noi è quello di semigruppi i cui elementi possano essere ordinati in catene lineari e che, per questo, verranno detti *semigruppi parzialmente* ordinati.

Le strutture algebriche che abbiamo rapidamente passato in rassegna in questo paragrafo sono solo un piccolo sottoinsieme delle strutture che vengono correntemente utilizzate in matematica. Ciò che qui interessa sottolineare è che tali strutture sono totalmente astratte e le loro proprietà non dipendono in alcun modo dalla natura degli elementi degli insiemi coinvolti. Questo, come vedremo, permetterà di impostare un interessante procedimento per lo studio delle proprietà delle reti sociali. Riconducendo queste ultime ad opportune strutture algebriche, le cui proprietà possono essere agevolmente studiate con gli strumenti astratti cui abbiamo accennato, diviene possibile analizzare le strutture relazionali e caratterizzarne le proprietà. Questo modo di procedere ha alla base la nozione fondamentale di rappresentazione, cui dedichiamo il prossimo paragrafo.

4.2 La nozione di rappresentazione

Da un punto di vista puramente concettuale, una rappresentazione è un processo logico in cui una entità "complessa" (il termine qui è utilizzato in senso generico) viene "mappata" in un'altra, in modo che le strutture d'interesse della prima siano mantenute all'interno della seconda. Un esempio storicamente interessante è quello della geometria analitica. La geometria greca descrive le figure in termini puramente geometrici, come luoghi di punti e attraverso concetti puramente geometrici (angoli, rette, congruenze…) cerca di stabilire relazioni e teoremi relativi alle proprietà di figure piane e solide. La geometria analitica, che si fa risalire a Cartesio, procede invece in modo differente: associa ad ogni punto dello spazio un insieme opportuno di coordinate, trasformando il problema geometrico in un problema analitico (un semplice esempio è riportato in Figura 12). Questo passaggio, che a noi sembra totalmente immediato, giacché viene insegnato nei primi anni delle scuole superiori, è in realtà molto profondo e nient'affatto scontato. Se, infatti, l'idea di associare ad un punto del piano una coppia di coordinate è abbastanza intuitiva, non è invece ovvio che le elaborazioni analitiche che si possono fare sulle coppie di numeri reali (coordinate) conservino poi le informazioni sulla geometria di partenza, in modo tale che sia effettivamente possibile dimostrare asserti geometrici tramite teoremi ed elaborazioni algebriche ed analitiche.

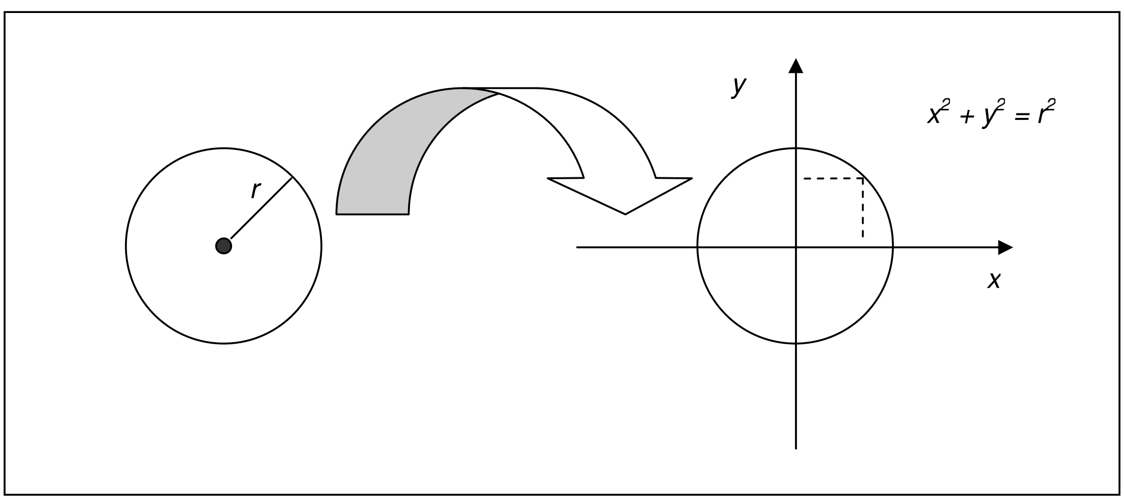

Figura 12.

Questo tipo di procedimento è rintracciabile anche in branche più moderne della matematica. Per esempio, la disciplina nota come topologia algebrica studia le proprietà topologiche (cioè invarianti per trasformazioni continue) di oggetti geometrici, attraverso lo studio delle proprietà di alcune strutture algebriche (per esempio gruppi) che possono essere convenientemente associate agli oggetti geometrici cui si è interessati.

La nozione di rappresentazione è, sostanzialmente, un processo logico di astrazione e “riconcretizzazione” di un’entità strutturata, in un’altra, le cui proprietà possano essere studiate più agevolmente. Formalmente, però, al termine si dà un accezione più precisa e tecnica che è quella che utilizzeremo nel prosieguo e che sta alla base dell’utilizzo delle struttura algebriche per lo studio delle reti sociali.

Per fissare le idee, consideriamo due semigruppi $(V, \bullet)$ e $(V', \bullet')$ (si noti che le operazioni di moltiplicazione sono diverse) e supponiamo che esista una mappa lineare $T : V \rightarrow V'$, tale che

$$T(v \bullet w) = T(v) \bullet' T(w).$$

Un trasformazione di questo tipo è chiamata *omomorfismo.* Essa ha la proprietà fondamentale di conservare il prodotto, cioè di trasformare il prodotto di due elementi nel prodotto dei trasformati (si noti, ancora una volta, che le moltiplicazioni a sinistra e a destra nella precedente formula sono diverse. La prima è quella del semigruppo di partenza e la seconda è quella del semigruppo di arrivo).

Come si vede, un omomorfismo è caratterizzato dal fatto di conservare la struttura moltiplicativa del semigruppo. Si noti che non viene affatto richiesto che la trasformazione sia biunivoca, quindi l’immagine omomorfa di un semigruppo può comportare una perdita d’informazione anche elevata, sui singoli elementi del semigruppo di partenza, ma ciò nonostante essa mantiene informazioni sulla struttura moltiplicativa. Se un omomorfismo è anche biunivoco (e quindi invertibile) esso è detto isomorfismo. In questo caso, tutta l’informazione sul semigruppo di partenza viene mantenuta nella sua immagine omomorfa.

L’esempio più classico di rappresentazione, tipico dei semigruppi, è quello in cui la mappa T trasformi ogni elemento del semigruppo in un operatore lineare su un opportuno spazio vettoriale. L’insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale (applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in se stesso) è infatti un semigruppo e al prodotto di due elementi del semigruppo di partenza viene associata la composizione degli operatori corrispondenti. Se poi nello spazio vettoriale viene scelta una base, gli operatori vengono rappresentati (tramite un ulteriore isomorfismo) come matrici e quindi, in definitiva, il semigruppo di partenza può essere rappresentato in termini matriciali. Al variare dello spazio vettoriale scelto, cambia la rappresentazione che, pertanto, non è unica.

Questo modo di procedere si generalizza a tutte le altre strutture algebriche. Il punto fondamentale è che la trasformazione T conservi tutte le operazioni e le relazioni definite sulla struttura di partenza. Si consideri, per esempio, il seguente gruppo abeliano G composto da 3 elementi (e, a, a^2), con la tabella di moltiplicazione data da $ee=e$, $ea = ae = a$, $aa=a^2$, $ea^2=a^2e=a^2$, $a^3=e$. Si consideri poi uno spazio vettoriale V bidimensionale e il corrispondente gruppo degli operatori lineari definiti su V a valori in V.

Un omomorfismo da G in V è dato, per esempio, dall'applicazione banale

$$T(g)=I$$

dove g indica un elemento del gruppo e I è la matrice identità. Si verifica immediatamente che questa applicazione conserva l'operazione di prodotto (nel gruppo degli operatori lineari, la moltiplicazione è la semplice composizione). Naturalmente, si tratta di un omomorfismo poco utile, poiché manda tutti gli elementi del gruppo nello stesso elemento del gruppo di arrivo, cioè nell'identità.

Viceversa, la trasformazione T definita da

$$T(e) = I$$

$$T(a) = R_{120}$$

$$T(a^2)=R_{240}$$

(dove R_{120} e R_{240} rappresentano rispettivamente una rotazione di 120° e una rotazione di 240°) è un isomorfismo del gruppo G nel gruppo delle simmetrie di un triangolo equilatero, cioè nel sottogruppo (I, R_{120}, R_{240}) del gruppo delle applicazioni lineari su V (si osservi, che l'identità può essere vista come rotazione di un angolo giro). Associando ad ognuno di questi tre operatori una matrice opportuna, previa scelta di una base nello spazio vettoriale, si può infine definire una rappresentazione di G nel gruppo delle matrici invertibili 2x2.

In generale, dunque, chiameremo *rappresentazione* di una struttura algebrica *A* in una struttura algebrica (dello stesso tipo) *A*’ qualunque omomorfismo tra *A* e *A*’. Tuttavia, come abbiamo visto in precedenza, discutendo il concetto di struttura algebrica, su una struttura di semigruppo è possibile sovrapporre anche una relazione d’ordine parziale. In questo caso, l’omomorfismo, o l’isomorfismo, che definisce la rappresentazione deve anche conservare l’ordinamento parziale, affinché nella trasformazione non venga persa questa importante relazione.

Per esempio, nel caso di semigruppi parzialmente ordinati omomorfi, si dovrà richiedere che l’omomorfismo *T* soddisfi la seguente coppia di condizioni:

$$T(v \bullet w) = T(v) \bullet' T(w).$$

$$v \leq w \rightarrow T(v) \leq' T(w)$$

dove abbiamo contrassegnato con ≤’ la relazione d’ordine nel semigruppo di arrivo (che in generale sarà diversa dalla relazione d’ordine del semigruppo del quale si costruisce l’immagine omomorfa).

E’ precisamente questo il tipo di situazione che incontreremo nelle applicazioni alla reti sociali.

4.3 Rappresentazione algebrica di una rete sociale

In questo paragrafo introduciamo una metodologia alternativa a quelle discusse in precedenza, per rappresentare la struttura relazionale di una rete sociale cioè, formalmente, di un grafo. Cominceremo con un esempio semplice, che introdurrà parte delle nozioni necessarie per il prosieguo, per poi aggiungere elementi che, se da una parte rendono più complicata la trattazione, dall'altra conferiscono maggior utilità agli strumenti che saranno sviluppati.

Sia dunque G un grafo con *n* vertici e un'arbitraria struttura di archi. Per convenienza, supponiamo che i vertici corrispondano a persone fisiche e che gli archi equivalgano alla relazione simmetrica "essere amico di" e indichiamo tale relazione con *R*. Stabilite quali siano le relazioni di amicizia dirette, è naturalmente interessante investigare le relazioni indirette (o composte). Le relazioni composte definiscono, infatti, i percorsi lungo i quali le informazioni presenti nella rete possono diffondersi, indipendentemente dal fatto che gli individui (qualora si tratti, come nel nostro caso, di reti sociali) ne siano consapevoli. Possiamo cominciare, quindi, con il domandarci, innanzitutto, chi siano gli "amici degli amici". Questo corrisponde a cercare tutte le coppie *(u,v)* di vertici del grafo, tali per cui esista almeno un vertice *s* in relazione con *u* e *v*, cioè tali per cui (*u,s*) e (*s,v*) appartengano a *R*. Possiamo indicare la relazione "essere amico di un amico" con la notazione R^2 e quindi stabilire che le coppie *u*,*v* aventi un amico in comune appartengono alla relazione R^2. Possiamo proseguire in questo modo e definire relazioni R^3, R^4 e così via. Se il grafo è finito e contiene *n* vertici, si può dimostrare (e ciò sarà mostrato poco sotto) che il numero massimo di relazioni distinte è pari a 2^k, con $k = n^2$.

In termini puramente formali, e ciò spiega la notazione adottata, possiamo rappresentare la costruzione delle relazioni composte di ordine superiore come composizione della relazione originaria *R*, tante volte quanto è l'ordine desiderato. E' chiaro che la composizione di relazioni (in questo caso di *R* con se stessa) è un'operazione associativa, per cui possiamo dire che l'insieme (R, R^2, R^3,…,R^k) costituisce un semigruppo rispetto alla composizione così come l'abbiamo definita. Si noti che il semigruppo ha un numero di elementi pari a k, benché sia possibile comporre la relazione *R* con se stessa un numero arbitrariamente grande di volte. La ragione di questo fatto, come sarà chiaro poco sotto, è che tutte le relazioni successive alla k-esima coincidono con relazioni del tipo R^p con $p \leq k$.

Questo discorso può essere reso più preciso e formale, introducendo un'opportuna rappresentazione per la relazione *R*.

Abbiamo visto in precedenza come la struttura relazionale di un grafo possa essere convenientemente rappresentata attraverso la matrice di adiacenza *A*, definita come una matrice binaria, che presenta valori pari a 1 solo in celle corrispondenti a vertici del grafo connessi da un arco.

Associamo dunque alla relazione *R* definita nel nostro esempio la corrispondente matrice di adiacenza e osserviamo quanto segue. Per definizione due vertici *u* e *v* appartengono a R^2, se e solo se esiste almeno un vertice *s* tale che (*u,s*) e (*s*,v) appartengano a *R*; si vede facilmente che questa condizione equivale a chiedere che il prodotto matriciale tra la riga di A corrispondente a *u* e la colonna corrispondente a *v* sia diverso zero. Più formalmente, se definiamo le operazioni di somma e moltiplicazione di un'algebra di Boole, come fatto in precedenza, alla relazione composta R^2 risulta corrispondere, come ci si poteva attendere, la matrice A^2.

Naturalmente, tutto ciò si può estendere anche alle relazioni composte di ordine maggiore, sino all'ordine k, giacché, grazie alle proprietà dell'algebra di Boole, tutte le potenze successive della matrice *A* coincidono con potenze di ordine non superiore a k.

La mappa che associa ad ogni elemento del semigruppo (R, R^2, R^3,…,R^k) un'opportuna matrice dell'insieme (A, A^2, A^3,…,A^k) è quindi un omomorfismo, che definisce una rappresentazione della struttura relazionale del grafo in un semigruppo di matrici. Si noti, inoltre, che tale omomorfismo è, in realtà, un isomorfismo.

L'esempio che abbiamo proposto è molto semplice. Tuttavia, esso contiene alcuni degli elementi principali dell'approccio algebrico alla descrizione strutturale di un grafo. Si noti, in particolare, la struttura del processo di rappresentazione utilizzato: il grafo è stato prima ridefinito come semigruppo e, successivamente, tale semigruppo è stato formalmente messo in corrispondenza biunivoca con un semigruppo matriciale, costruito su un'algebra di Boole. A questo punto dovrebbe anche essere immediato comprendere perché il numero massimo possibile di relazioni composte sia pari a 2^k (con $k = n^2$): questo è precisamente il numero di tutte le possibili matrici binarie quadrate con *n* righe ed *n* colonne (ogni elemento di matrice può assumere due valori – 0 o 1 – e vi sono precisamente n^2 elementi).

Estendiamo adesso il metodo appena descritto, considerando una rete sociale contenente due tipi di relazione e, quindi, un grafo contenente due diversi tipi di archi.

Sia dunque G un grafo con *n* vertici e due relazioni che indicheremo con *Q* e *R* (per fissare le idee, assumiamo che *Q* sia la relazione definita da "essere collega di" ed *R* sia la relazione definita da "essere amico di"). Innanzitutto, osserviamo che le due relazioni sul grafo G possono essere descritte separatamente, mediante due distinti semigruppi che indicheremo con

$$Sq = (Q, Q^2, Q^3, \ldots, Q^k)$$

$$Sr = (R, R^2, R^3, \ldots, R^k).$$

I due semigruppi possono poi essere rappresentati in termini matriciali, come fatto in precedenza. Per semplicità, indicheremo ancora con *Q* ed *R* le matrici di adiacenza relative alle due relazioni.

La compresenza di due relazioni sul medesimo insieme di vertici consente di considerare anche la loro composizione, cioè permette di indagare relazioni composte del tipo "essere amico di un collega" o "essere collega di un amico".

La relazione composta *RQ* (due persone sono legate da questa relazione se esiste una terza persona che sia amica della prima e collega della seconda) è, in quanto tale, una relazione al pari di *R* o *Q*; essa può essere definita individuando l'insieme di coppie *(u,v)* che vi appartengono o costruendo la relativa matrice di adiacenza. Concretamente, le coppie di vertici legate dalla relazione composta *RQ* sono costituite da quei vertici *u* e *v* del grafo tali per cui esiste almeno un vertice *s* tale che *(u,s)* stia in *R* e *(s,v)* stia in Q. In termini matriciali, si vede facilmente che la matrice di adiacenza della relazione *RQ* è precisamente il prodotto delle matrici di adiacenza di *R* e *Q*, il che spiega la notazione che abbiamo scelto. Per chiarezza, facciamo un semplice esempio (Pattison, 1993). Consideriamo un grafo con 4 vertici e due relazioni *R* e *Q* definite dalle seguenti matrici di adiacenza:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

corrispondenti al seguente grafo (nel quale la relazione *R* è rappresentata da archi continui e la relazione *Q* da archi tratteggiati; si noti che la matrice della relazione *R* non è simmetrica, pertanto il grafo è un grafo orientato e, laddove necessario, abbiamo indicato il verso delle frecce. Dove le frecce sono assenti, la relazione è simmetrica).

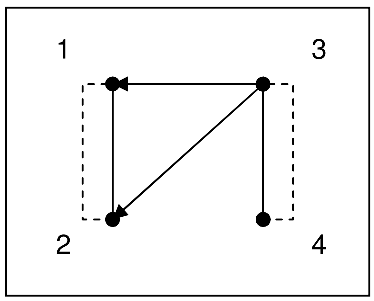

Figura 13 (*R*, arco continuo, *Q* arco tratteggiato).

La matrice di adiacenza della relazione composta *RQ* risulta essere (si noti la presenza di loop)

$$RQ=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo iterare il procedimento e, per esempio, chiederci come sia fatta la relazione composta *RQR*, che si ottiene componendo le relative matrici, tenendo conto delle regole di calcolo valide all'interno dell'algebra di Boole. Il risultato è il seguente

$$RQR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che corrisponde al grafo riportato in Figura 14 (la relazione è rappresentata dalla linea tratteggiata).

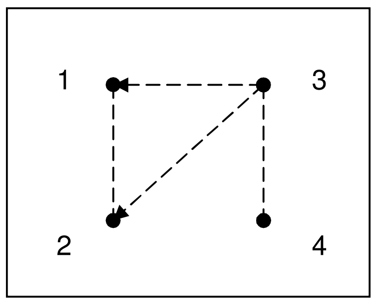

Figura 14.

Il procedimento che abbiamo descritto sino a qui può essere generalizzato al caso in cui sull'insieme di vertici siano presenti più di due relazioni, cioè quando si abbia a che fare con un multigrafo generico. Ad ogni relazione viene associata la relativa matrice di adiacenza e la composizione delle relazioni equivale alla composizione booleana di tali matrici.

Algebricamente, l'insieme delle relazioni presenti sul grafo, insieme con l'operazione di composizione forma un semigruppo (la composizione di relazioni è associativa) e l'insieme di matrici di adiacenza con l'operazione di composizione matriciale ne è quindi una rappresentazione (dalla discussione precedente, si verifica che l'applicazione che a una relazione associa la corrispondente matrice di adiacenza è un omomorfismo tra semigruppi, giacché conserva la moltiplicazione).

Abbiamo già osservato che, formalmente, l'insieme delle relazioni che possono essere generate attraverso la composizione delle relazioni originarie ha cardinalità infinita numerabile, mentre l'insieme delle matrici booleane *nxn* è in numero di 2^k, con $k = n^2$. In realtà, una relazione è definita specificando l'insieme delle coppie che sono in relazione fra loro e tali coppie sono in corrispondenza biunivoca con le matrici di adiacenza. Conveniamo dunque di *definire* uguali due relazioni *R* e *Q* se vale la relazione

(u,v) APPARTIENE A *R* se e solo se (u,v) APPARTIENE a *Q*

.

(per quanto ciò sembri del tutto ovvio, in realtà vi è un aspetto sottile che merita di essere messo in luce. Una relazione è definita, di per sé, in un campo semantico proprio che può non aver nulla a che fare con il grafo sul quale essa è concretamente realizzata. "Essere amico di" non è concettualmente equivalente a "essere collega di", ma può accadere che in un certo "mondo", cioè per un certo insieme di individui, le due relazioni coincidano nel senso che si riscontri che due individui legati dalla relazione "essere amici" siano sempre legati anche dalla relazione "essere colleghi" e viceversa. Ciò significa che sull'insieme di individui considerato le due relazioni sono formalmente identiche e che non ha senso trattarle come due entità differenti. Naturalmente, però, poiché ogni realtà sociale è dinamica e nel tempo potrebbero rompersi rapporti di amicizia o mutare gli assetti lavorativi, le due relazioni potrebbero poi differenziarsi, per cui è semanticamente importante tenerle distinte. Ma da un punto di vista algebrico, sul grafo originario esse sono del tutto equivalenti. Questo tipo di osservazione mette così in evidenza l'importanza del contesto, cioè, in questo caso, dell'insieme di individui considerato. In molti altri campi sorgono situazioni apparentemente ambigue per questo tipo di problema. Per esempio, in statistica multivariata capita che variabili semanticamente diverse abbiano, su una data popolazione, gli stessi identici valori, cioè siano identiche, come funzioni degli individui. La presenza di variabili identiche, tecnicamente collineari, crea problemi nell'applicazione delle tecniche statistiche, per esempio perché non permette di attuare le usuali procedure di regressione e di riduzione dei dati. In realtà, il punto essenziale è che le due variabili distinte non sono tali sulla popolazione considerata e quindi, da un punto di vista matematico, non possono essere trattate come se fossero diverse. In ultima analisi, possiamo ricondurre queste considerazioni all'osservazione che il dominio di una funzione rientra a pieno titolo nella definizione della funzione stessa e che, pertanto, non è lecito affermare che due funzioni siano differenti solo perché la legge algebrica che le definisce operativamente è diversa. Su opportuni insiemi, infatti, tali leggi potrebbero definire la stessa immagine.)

Tecnicamente, la definizione di uguaglianza che abbiamo dato è sostanzialmente equivalente a quozientare il semigruppo delle relazioni rispetto alla relazione di equivalenza "avere la medesima matrice di adiacenza". In questo modo, l'omomorfismo indotto sul semigruppo quoziente (i cui elementi sono classi di equivalenza) con immagine nel semigruppo delle matrici di adiacenza è, per costruzione, un isomorfismo.

Mostriamo ora come sul semigruppo definito dalle relazioni vigenti su un grafo, unitamente alla legge di composizione, possa essere aggiunto un ordinamento parziale.

Date due relazioni R e Q, diremo che $R \leq Q$ se ogni coppia (u,v) di elementi del grafo connessi da R sono anche connessi da Q, cioè, in forma sintetica, se R implica Q. Si tratta, evidentemente, dell'ordinamento indotto dalla relazione insiemistica di inclusione: se l'insieme delle coppie di vertici appartenenti a R è un sottoinsieme dell'insieme delle coppie di vertici appartenenti a Q, allora, insiemisticamente, possiamo dire che Q comprende R e quindi diremo che R è minore o uguale di Q.

Affinché l'ordinamento parziale e la legge di composizione siano compatibili fra loro, occorre verificare che se $R \leq Q$, allora sia anche $RW \leq QW$, per qualunque altra relazione W definita sul grafo. Si vede immediatamente che questa proprietà è vera, perché se due vertici sono connessi da un arco di tipo RW, allora, per definizione, lo sono anche da un arco di tipo QW (dato che le coppie di vertici appartenenti alla relazione R sono un sottoinsieme di quelle appartenenti alla relazione Q). In definitiva, la struttura relazionale di un grafo viene quindi descritta associando al grafo stesso la struttura algebrica di *semigruppo parzialmente ordinato* che è uno degli oggetti fondamentali dell'intero approccio algebrico allo studio delle reti sociali.

In termini di matrici di adiacenza, la relazione d'ordine può essere definita in modo molto semplice come segue. La matrice di adiacenza R (usiamo, come in precedenza, lo stesso simbolo per la relazione e la relativa matrice) è minore o uguale della matrice di adiacenza Q se:

$$R_{ij} = 1 \rightarrow Q_{ij} = 1$$

cioè se un elemento che valga *1* nella matrice R vale *1* anche nella matrice Q.

E' immediato verificare che la rappresentazione del semigruppo delle relazioni nel semigruppo delle matrici di adiacenza mantiene l'ordinamento (la dimostrazione è praticamente una tautologia, in virtù delle osservazioni fatte sinora), pertanto possiamo affermare che la mappa

$$T: R \text{ (relazione)} \rightarrow R \text{ (matrice di adiacenza)}.$$

è effettivamente un isomorfismo tra semigruppi parzialmente ordinati. L'esistenza di questo isomorfismo permette di studiare la struttura relazionale globale di una rete attraverso lo studio delle relative matrici di adiacenza, conservando, in particolare, la struttura di ordinamento. Giacché la struttura di ordinamento è, in questo caso, una relazione di inclusione insiemistica, la sua presenza permette di effettuare deduzioni e determinare implicazioni, utili per descrivere la struttura reale della rete e individuare, al suo interno, catene di individui, per le quali sia possibile stabilire un ordinamento totale. In questo modo, la rete "prende forma", nel senso che i suoi individui possono essere associati ad opportune classi, in base alle relazioni dirette e composte esistenti tra di essi.

Abbiamo così mostrato come sia possibile rappresentare la struttura relazionale di una rete, tenendo presente l'esistenza di una relazione di ordine parziale tra relazioni. Tutta la rete è descritta, in ultima analisi, mediante il semigruppo parzialmente ordinato delle matrici di adiacenza delle relazioni originarie e di quelle composte, ottenute dalle prime per composizione successiva. La possibilità di descrivere una rete in questi termini è evidentemente fondamentale, perché il semigruppo delle matrici di adiacenza è un oggetto algebrico che possiamo associare alla rete in quanto tale, senza dover costruire indicatori di sintesi di natura topologica che, come tali, perdono parte dell'informazione sulla rete medesima.

D'altro canto, non è difficile immaginare situazioni in cui l'interesse sia limitato a studiare la struttura relazionale di un singolo individuo. I motivi possono essere i più svariati. Per esempio, possono esistere individui (in questo contesto, l'individuo della cui struttura relazionale si è interessati è indicato con il termine *ego*) che hanno un ruolo particolare (in una rete scale-free, gli individui che fungono da hub hanno una posizione privilegiata, come abbiamo già discusso); in altri casi, possiamo essere in presenza di un'informazione parziale sulla rete e, quindi, nell'impossibilità di costruire il suo semigruppo, dovendo limitarci a costruire i semigruppi per un individuo o sottoinsiemi di individui. Ancora, possiamo essere interessati a valutare se, nel tempo, un individuo muta il suo ruolo nella rete o se, in due reti distinte, esistono individui che hanno ruoli confrontabili.

Tecnicamente, la necessità di studiare la struttura di relazione locale di un ego può sorgere perché l'informazione sulle relazioni di un individuo possono essere parziali. Per esempio, talvolta si ha conoscenza di un ego, degli individui che sono direttamente connessi ad esso e della struttura di connessione di questi ultimi al proprio interno. Questo sottoinsieme della rete è chiamato *zona del primo ordine* (qualora si aggiungesse a questi individui anche la collezione delle zone del primo ordine di ciascuno di essi, si otterrebbe la *zona del secondo ordine* dell'ego considerato e così via, incrementando gli ordini delle zone). Questo può avvenire quando una rete venga esplorata attraverso il cosiddetto *campionamento snowball* (Thompson, 2002), nel quale si seleziona un individuo e, successivamente, si selezione tutta (o in parte) la sua zona del primo ordine e poi le zone del primo ordine degli individui così aggiunti, sino ad un certo ordine *k*. Il campione che si ottiene con questa procedura fornisce solo un'informazione (usualmente parziale) sulla struttura di connessione locale di un ego.

Gli strumenti che abbiamo sviluppato sino adesso permettono di impostare convenientemente lo studio della struttura locale di una rete, in modo molto simile a quanto fatto per l'analisi globale. E' possibile, infatti, anche costruire un semigruppo solo per le relazioni che coinvolgono un singolo ego, insieme al semigruppo delle corrispondenti matrici di adiacenza. La medesima costruzione si può, poi, effettuare se si è interessati alle relazioni che hanno un sottoinsieme di individui come ego. Nel caso dello studio della struttura locale di una rete è comunque possibile sviluppare, sulla medesima linea algebrica, ulteriori e più sofisticati strumenti d'indagine, per i quali rimandiamo a (Pattison, 1993).

4.4 Decomposizione di reti.

Le tecniche che abbiamo esposto sinora sono molto generali e, come tali, possono essere poco efficienti. Di seguito, diamo un breve cenno ad alcuni strumenti algebrici che permettono di estendere lo spettro delle analisi strutturali (Pattison 1993), soprattutto quando le strutture coinvolte comprendano molti individui e presentino un'elevata complessità relazionale. Giacché si tratta di un argomento estremamente tecnico, pur se con riflessi applicativi molto interessanti, nel presente paragrafo presentiamo i principali elementi di metodo, rimandando alla letteratura per dettagli e approfondimenti. I metodi in esame sono essenzialmente riconducibili a tecniche di decomposizione aventi l'obiettivo di identificare le componenti di un grafo, per ottenerne una descrizione strutturale. Partendo dal semigruppo relazionale, l'obiettivo è quello di decomporre un grafo in elementi che siano non ulteriormente riducibili e, in un senso che definiremo, il più possibile indipendenti tra loro.

Lo strumento formale con il quale è possibile perseguire questo programma è la nozione di *prodotto diretto* di semigruppi parzialmente ordinati. Dati due semigruppi parzialmente ordinati *S* e *T*, possiamo costruire un semigruppo *SxT prodotto diretto di S e T* avente come elementi le coppie appartenenti al prodotto cartesiano di *S* e *T* e con moltiplicazione e ordinamento parziale definiti nel seguente modo:

$$(s_1, t_1)\ (s_2,t_2) = (s_1 s_2,\ t_1 t_2)$$

$$(s_1, t_1) \leq (s_2, t_2) \ \leftrightarrow \ s_1 \leq s_2 \ \text{ e } \ t_1 \leq t_2 \ .$$

La nozione di prodotto diretto si estende immediatamente ad una collezione finita qualunque di semigruppi parzialmente ordinati.

Se un semigruppo parzialmente ordinato è isomorfo al prodotto diretto di una collezione finita di semigruppi non banali (cioè che non si riducano ad un unico elemento), allora il semigruppo di partenza è detto *riducibile* (altrimenti, esso è detto *irriducibile*). I semigruppi che compongono la sua rappresentazione in prodotto diretto, sono chiamati *componenti dirette* (dall'algebra universale, è possibile derivare un fondamentale teorema che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una rappresentazione come prodotto diretto di semigruppi. Il teorema, molto tecnico, è basato sulle proprietà del reticolo degli omomorfismi che preservano l'ordinamento parziale di un semigruppo parzialmente ordinato e la sua enunciazione, insieme alla relativa dimostrazione, può essere rintracciata in (Pattison, 1993) e in (Birkhoff, 1948)).

Quando la decomposizione esiste, essa permette di studiare e caratterizzare il semigruppo originario in termini di componenti molto più semplici. Tuttavia, il limite di questo approccio è che di fatto i semigruppi direttamente riducibili sono pochi (per esempio, si può dimostrare che un semigruppo con un numero dispari di elementi non è mai riducibile (Pattison, 1993)). Per ovviare a questa limitazione, è possibile introdurre un tipo differente di decomposizione, nel quale i componenti possono avere fra loro una parziale sovrapposizione. Tale decomposizione è detta *decomposizione sottodiretta*.

La definizione di rappresentazione sottodiretta, che è piuttosto tecnica, può essere data come segue. Si consideri un semigruppo parzialmente ordinato S e una collezione finita di semigruppi parzialmente ordinati $S_1,\ldots,S_k$. Si consideri il prodotto diretto di tali sottogruppi. Il semigruppo S è rappresentazione sottodiretta di $S_1 x \ldots x S_k$, se esso ne è un sottosemigruppo parzialmente ordinato (cioè un sottoinsieme del semigruppo parzialmente ordinato, che soddisfi a sua volta gli assiomi di semigruppo parzialmente ordinato) e se, scelto un qualunque elemento s_j appartenente a S_l, esiste un elemento s del semigruppo S tale che la sua componente j-esima coincida con l'elemento s_j (si ricordi che, in quanto sottosemigruppo di un semigruppo prodotto diretto, l'elemento s è una k-upla di elementi, ognuno dei quali appartiene a un singolo semigruppo fattore, secondo l'ordine prestabilito). Questa definizione implica che la mappa che a ogni elemento s in S associa la sua componente sul semigruppo S_j (questa mappa è detta *proiezione*) sia un omomorfismo che preserva l'ordinamento parziale.

Anche per questo tipo di rappresentazione esiste un teorema che stabilisce la condizione necessaria e sufficiente per la sua esistenza. Si tratta di un risultato molto tecnico, per il quale rimandiamo a (Pattison, 1993) e (Birkhoff, 1967). Ciò che importa notare è che le condizioni di esistenza sono più deboli di quelle richieste nel caso della decomposizione in prodotto diretto e ciò spiega perché la classe dei semigruppi sottodirettamente riducibili sia più ampia di quella dei semigruppi direttamente riducibili.

Si noti, infine, che, quando esiste, la decomposizione in prodotto sottodiretto non è unica e quindi si può porre il problema di come scegliere la decomposizione più "utile". Un criterio di massima consiste nel selezionare quelle rappresentazioni le cui componenti non sono ulteriormente riducibili. Esiste, infatti, un procedimento di raffinamento delle rappresentazioni che conduce a individuare una classe di rappresentazioni minimali (cioè, in un certo senso, più semplici delle altre). Inoltre, se il semigruppo di partenza possiede particolari proprietà, questa procedura risulta condurre addirittura ad una decomposizione ottimale unica. Tale processo, estremamente tecnico, va sotto il nome di *fattorizzazione* (i dettagli possono essere rintracciati in (Pattison, 1993)).

Mediante il processo di fattorizzazione è possibile individuare un insieme di componenti che svolgono un ruolo analogo a quello delle componenti principali nel caso delle analisi statistiche multivariate e rispetto alle quali è possibile esprimere il semigruppo di partenza, in analogia alla situazione in cui un vettore viene espanso su una base prescelta. La differenza fra i due tipi di decomposizione consiste nel fatto che mentre le componenti di una decomposizione in prodotto diretto sono fra loro indipendenti, le componenti di una decomposizione in prodotto sottodiretto lo sono solo parzialmente (ed è possibile quantificare in quale misura esse siano indipendenti, attraverso un particolare indice normalizzato, detto indice di *associazione)*.

Abbiamo sinteticamente descritto gli strumenti per la decomposizione di un semigruppo parzialmente ordinato in prodotto diretto (o sottodiretto) di altri semigruppi parzialmente ordinati, accennando alle possibilità che l'approccio algebrico permette. Concludiamo questo paragrafo semplicemente osservando che analoghe procedura possono essere messe in campo per analizzare la struttura relazionale locale di una rete sociale.

4.5 Confronto strutturale tra grafi

Quanto descritto sinora consente di descrivere e caratterizzare una rete sociale e le sua struttura topologica e relazionale. Se, d'altro canto, ci si pone dal punto di vista di chi deve governare una rete di questo tipo, come è nel caso del sistema scolastico, si comprende come sorga il problema di sviluppare metodi per confrontare reti in evoluzione. Un sistema sociale evolve nel tempo: individui vi si aggiungono e altri ne fuoriescono; nuovi tipi di relazione possono sorgere e vecchie relazioni possono sparire; la struttura topologica e relazionale può mutare, sia a livello globale che a livello locale.

In fase di governo è essenziale saper cogliere i mutamenti, per cui il problema del confronto temporale tra reti assume un ruolo centrale (peraltro, il confronto tra strutture di rete non è necessariamente confinato al caso temporale. Per esempio, se si desidera confrontare sistemi scolastici diversi dal punto di vista strutturale, individuandone analogie e differenze e verificare se sia possibile ricondurre fenomenologie comuni all'esistenza di strutture affini, si pone un problema di confronto che potremmo chiamare "spaziale" (questa terminologia è mutuata dalla statistica); analogamente, lo stesso tipo di problema si pone se si desidera confrontare sottoinsiemi del medesimo sistema, per esempio la struttura relazionale del sistema della formazione primaria rispetto a quella del sistema della formazione secondaria, e così via).

In generale, il mutamento di una rete sociale non avviene necessariamente in maniera uniforme all'interno della rete stessa; parti di essa possono evolvere in modo diverso e con differenti velocità. Inoltre, non è detto che un mutamento nella rete produca sempre un mutamento nella sua struttura (per esempio, l'aggiunta di un individuo allarga la rete, ma può non apportare modifiche alla struttura algebrica delle relazioni presenti al suo interno).

Coerentemente con la linea espositiva che abbiamo seguito sinora, possiamo impostare il problema del confronto tra reti sociali sia nell'ambito delle descrizioni topologiche della struttura dei corrispondenti grafi, sia nell'ambito delle rappresentazioni algebriche delle loro strutture relazionali. Da un punto di vista topologico, l'impostazione del problema è molto semplice. La topologia di un grafo viene caratterizzata attraverso una serie di indicatori sintetici, in parte discussi in precedenza, che possono essere direttamente confrontati fra loro, in diversi tempi o in diverse situazioni spaziali. Si possono così confrontare le ampiezze dei grafi (numero di nodi), il numero di relazioni esistenti al loro interno, la loro articolazione in componenti connesse e, infine, gli indicatori strutturali (lunghezza caratteristica o coefficiente di clusterizzazione).

Questo approccio, semplice nella sua impostazione, soffre però di un problema, che si incontra ogniqualvolta si descriva un'entità mediante una pluralità di indicatori. La multidimensionalità rende infatti complessi i confronti, giacché, in assenza di un modello che leghi fra loro le diverse dimensioni, non è possibile stabilire un criterio di ordinamento significativo tra grafi. E' una situazione tipica di tutte le descrizioni multivariate di fenomeni statistici. Qui la ricerca di un criterio sintetico di confronto, che consenta di ordinare senza ambiguità gli individui, viene effettuata sfruttando le correlazioni tra gli indicatori, in modo da costruirne una combinazione che rappresenti l'insieme dei dati, minimizzando la perdita d'informazione, secondo un criterio che normalmente è riconducibile a quello dei minimi quadrati. Questo tipo di tecnica può essere teoricamente applicata anche al nostro contesto, ma la condizione perché ciò possa essere fatto è che il numero di reti sulle quali vengono calcolati i vari indicatori sia sufficientemente elevato, in modo da consentire uno studio adeguato della struttura di correlazione degli indici.

L'evoluzione della struttura relazionale di una rete sociale nel suo complesso può, però, essere studiata anche attraverso i metodi algebrici descritti nei paragrafi precedenti. Si tratta di un approccio tanto interessante, quanto tecnico, cui facciamo cenno per completezza.

Seguendo Pattison (Pattison, 1993), possiamo impostare un confronto strutturale tra grafi come confronto delle componenti in cui essi possono essere decomposti. L'insieme delle componenti che i grafi esaminati hanno in comune rappresenta la "parte" strutturale che non è mutata (o non è evoluta), mentre le componenti specifiche dei singoli grafi identificano ciò che li contraddistingue e che, per esempio nel caso di un'evoluzione temporale, è stato perso o acquisito al passare del tempo. Il confronto tra grafi, da un punto di vista algebrico, prende le mosse dalla definizione della situazione in cui due grafi sono "relazionalmente" equivalenti, anche se le relazioni che vengono considerate sono differenti da un punto di vista semantico. Diremo dunque che due grafi sono *comparabili*, se le relazioni che esistono al loro interno possono essere messe in corrispondenza biunivoca, da un punto di vista insiemistico e diremo che sono "relazionalmente" isomorfi se tra i loro semigruppi parzialmente ordinati esiste un isomorfismo che conservi anche l'ordinamento parziale. E' facile verificare (Pattison, 1993) che la struttura di semigruppo parzialmente ordinato non cambia se alla rete viene aggiunto un individuo che ha la stessa struttura relazionale di un altro individuo già presente nella rete o se un insieme di individui con la medesima struttura di relazione viene eliminato e, al suo posto, viene messo un individuo solo, con la medesima struttura relazionale del blocco. Si può anche verificare che se due reti con semigruppi isomorfi vengono unite (in senso insiemistico), il semigruppo della nuova rete è isomorfo a quello delle reti originarie (si noti che in questa nozione di unione, non vengono aggiunti nuovi link tra gli individui). Così facendo, è possibile stabilire condizioni che garantiscano l'equivalenza relazionale di reti differenti. Quando due grafi non sono invece equivalenti da un punto di vista relazionale, si può stabilire che un grafo sia meno complesso di un altro se esiste un omomorfismo che preservi l'ordinamento parziale del semigruppo del primo nel semigruppo del secondo.

Così facendo, abbiamo completato l'"algebrizzazione" della struttura globale di un grafo. Non solo è possibile descrivere strutture di relazione di una rete sociale in termini di semigruppo, ma è anche possibile impostare un confronto strutturale mediante lo studio dell'insieme degli omomorfismi tra semigruppi. Nonostante l'astrazione di questi strumenti, il fatto che la struttura del grafo possa essere "estratta" e rappresentata in una struttura algebrica come quelle che abbiamo utilizzato consente di "calcolare" le proprietà strutturali del grafo, senza alcun riferimento al tipo specifico di relazione. Qui sta la potenza dei metodi che abbiamo presentato in questo lavoro.

5. Elementi per una rappresentazione del sistema scolastico come sistema complesso

Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato come sia possibile rappresentare e studiare la struttura di un grafo da un punto di vista topologico e relazionale; abbiamo anche discusso la potenziale rilevanza di questo tipo di rappresentazione per la descrizione e la comprensione della fenomenologia complessa e sistemica di una rete sociale, come il sistema scolastico. Il problema che ora si pone è quello di stabilire come si possa operativamente giungere ad una rappresentazione di questo sistema come grafo e di individuare su quali aspetti sia più importante acquisire informazioni, per una modellizzazione delle relazioni tra gli agenti che lo compongono. Poiché qui si entra nel merito di precisi meccanismi psicologici, relazionali, sociologici, didattici e anche legislativi, che richiedono competenze ed esperienze specifiche che non fanno parte del nostro personale bagaglio culturale (e anche a causa del fatto che, come già notato, non esiste una letteratura adeguata), ci limiteremo a fornire alcune linee guida ed indicazioni di metodo che ci sembra utile seguire, qualora si voglia procedere alla rappresentazione del sistema scolastico come rete sociale e quindi come grafo.

1. Innanzitutto, occorre individuare gli agenti coinvolti nel sistema. L'identificazione dei soggetti da considerare è infatti fondamentale, perché essa delimita a priori il grafo e, di fatto, determina il tipo di relazione (o i tipi di relazione) da considerare. Pertanto, questa scelta deve essere fatta a seguito di una definizione precisa del tipo di fenomeno alla cui spiegazione si è interessati.

2. Congiuntamente al punto precedente, è necessario individuare, almeno tentativamente, le tipologie di relazione che si ritiene possano instaurarsi tra i soggetti appartenenti alla rete. Dato che individui e relazioni, o vertici ed archi in termini formali, sono in relazione duale, la scelta degli individui e la scelta delle relazioni non possono essere fatte a prescindere l'una dall'altra, benché poi, operativamente, si possa procedere per approssimazioni successive. Occorre anche tenere presente che la conoscenza che abbiamo dei meccanismi e delle relazioni che si instaurano tra i soggetti del sistema scolastico è limitata. Si tratta quindi di impostare un processo di conoscenza progressivo che, presumibilmente, parta da una struttura relazionale più semplice, da arricchire mano a mano che la comprensione delle interazioni aumenta.

3. Ottenuta la descrizione formale del grafo, l'apparato tecnico che abbiamo descritto può essere direttamente applicato, calcolando gli indicatori topologici o costruendo i semigruppi di rappresentazione della struttura relazionale della rete. In particolare, dovrebbero essere individuate le eventuali caratteristiche small-world o scale-free, l'esistenza di hub o di altri vertici in posizione privilegiata, i valori tipici degli ordini dei vertici, il coefficiente di clusterizzazione e la lunghezza caratteristica della rete. Naturalmente, tutto ciò dovrebbe essere effettuato per ciascuna delle relazioni presenti nel sistema e, laddove ciò abbia senso, per le relazioni composte. Per queste ultime, poi, dovrebbe essere condotto uno studio sulla struttura di ordinamento, utilizzando i metodi algebrici che abbiamo descritto.

4. Sulla base dei punti precedenti, è poi possibile istituire confronti temporali o spaziali per la rete o per le sue parti e componenti, a partire dalle caratteristiche individuate nella prima fase dell'analisi. Ciò dovrebbe essere condotto sia a livello globale che locale.

5. Tutti i punti precedenti, si basano sull'assunto che sia possibile acquisire le informazioni adeguate per la costruzione del grafo. Questo aspetto pone una serie di problemi che qui accenniamo, ma che, compiutamente, faranno parte della successiva fase del progetto. L'acquisizione di informazioni sulla struttura di una rete sociale può avvenire attraverso l'utilizzo integrato di fonti dati differenti e metodi statistici di natura diversa. Ogni fonte ed ogni metodologia porta con sé punti di forza e di debolezza che devono essere tenuti presente, per una corretta impostazione del problema. Nelle applicazioni sociali della teoria dei grafi, il metodo di raccolta dei dati è tipicamente di natura campionaria. Ogniqualvolta si effettui un'indagine campionaria, i criteri di costruzione del campione sono sostanzialmente riconducibili a due: la rappresentatività e la dimensione. La prima caratteristica è connessa al fatto che il sottoinsieme (campione) sia, informalmente parlando, un'immagine fedele della popolazione totale (cui ci si riferisce con il termine di *universo*). La seconda caratteristica è relativa al fatto che, a parità di potere rappresentativo, tanto più il campione è piccolo, tanto meno dispendiosa è la sua estrazione, in termini di costi e di tempi. Naturalmente, tra rappresentatività e dimensione esiste un trade-off, nel senso che tra di esse occorre trovare un compromesso. D'altro canto, la relazione tra ampiezza e rappresentatività del campione non è semplice e dipende fortemente dalle modalità di costruzione del campione stesso. In presenza di informazioni aggiuntive sulla popolazione, la costruzione di campioni stratificati permette di ottenere campioni di dimensioni ridotte, ma ciononostante molto rappresentativi. La possibilità di limitare l'ampiezza del campione, senza perdere in rappresentatività, è sempre legata alla disponibilità di informazioni sulle correlazioni tra le variabili oggetto dell'indagine e altre variabili (dette *ausiliarie*) di più facile rilevazione. In questo modo, è possibile selezionare un campione composto da un insieme

di strati caratterizzati da piccola variabilità interna; un numero limitato di individui per ogni strato consente, pertanto, di ottenere stime molto affidabili delle informazioni d'interesse. La costruzione di campioni efficienti richiede quindi una conoscenza della struttura di correlazione tra le variabili che caratterizzano gli individui della popolazione sotto esame. E' chiaro che la presenza di una struttura relazionale tra i soggetti del sistema scolastico produce, come effetto, l'esistenza di comportamenti coerenti e di correlazioni, grazie alle quali si possono formare sottogruppi uniformi rispetto alle variabili da studiare (per esempio, il rendimento scolastico, i risultati in certe materie specifiche o l'efficacia e l'efficienza della gestione di un istituto scolastico da parte del preside e così via). Se, come è lecito supporre, le correlazioni nei comportamenti e nei risultati possono essere veicolate dalla struttura relazionale della rete sociale, la conoscenza del grafo diventa una condizione in grado di agevolare l'estrazione di campioni rappresentativi e di dimensione limitata, migliorando l'efficienza del processo di indagine statistica, sia dal punto di vista dei risultati (minor variabilità delle stime), sia dal punto di vista del processo esecutivo, diminuendo i costi e i tempi dell'indagine stessa, sia dal punto di vista dell'interpretazione dei risultati, fornendo criteri di lettura dei fenomeni.

Concludiamo, accennando all'utilizzo di possibili fonti alternative di dati, per la descrizione del sistema scolastico. Recentemente, e in altri ambiti rispetto a quello oggetto del presente lavoro, si è cominciato ad utilizzare banche dati amministrative per effettuare analisi di natura statistico-economica e sociale (Aimetti&Zavanella, 2004). Queste fonti informative hanno il grande vantaggio di coprire, almeno in via teorica, l'universo della popolazione d'interesse, eliminando la necessità di ricorrere ad indagini campionarie ad hoc. Inoltre, esse contengono dati che vengono generati da flussi già in essere a livello istituzionale e per i quali non è, in generale, necessario effettuare altri investimenti. Inoltre, queste fonti mettono a disposizione i dati con continuità temporale e ciò elimina il problema di effettuare indagini campionarie di tipo panel, estremamente complicate e fragili per le difficoltà di gestione del campione. D'altra parte, i dati contenuti negli archivi amministrativi sono stati generati per fini diversi da quelli conoscitivi e di natura statistica, per cui l'informazione a disposizione non è sempre consistente con i metodi di analisi statistica e la determinazione dell'error-profile dei dati può essere piuttosto complessa. Inoltre, la struttura dei metadati (per esempio dei criteri di classificazione) non è sempre semanticamente adeguata e può rispondere più a esigenze burocratiche che conoscitive. Ciononostante, le fonti amministrative possono aiutare a costruire un rilevante quadro d'insieme dei fenomeni e della loro evoluzione. In tal senso, l'uso integrato di fonti amministrative e indagini ad hoc (la cui necessità può essere individuata proprio tramite l'uso dei dati amministrativi) sembra essere, in via generale, un approccio assai promettente. Nel caso della scuola, esistono per esempio archivi relativi alle carriere dei docenti, che permetterebbero di ricostruire gli "spostamenti" di un insegnante in diversi istituti e il cui utilizzo aiuterebbe a comprendere la struttura delle relazioni che i docenti possono stabilire, attraverso il loro passaggio in diverse scuole. Si tratta, come evidente, di semplici spunti, ma crediamo che una valutazione del patrimonio informativo presente negli archivi del Ministero e degli Uffici Scolastici locali possa far emergere un insieme di dati la cui ricchezza non è forse ancora stata analizzata e compresa.

Bibliografia

1. Aimetti P. Zavanella B. (a cura di), *Qualità degli archivi amministrativi e qualità dell'informazione statistica*, Franco Angeli, 2004.

2. Albert, R., Jeong H., and Barabási A.-L., *Diameter of the World-Wide Web*, Nature 401, 130–131, 1999.

3. Aldridge C. H., *Methods for Creating Scale-Free Networks Without Resorting to Global Knowledge* Presented at SIRC 2005 – The 17th Annual Colloquium of the Spatial Information Research Centre University of Otago, Dunedin, New Zealand, November 24th–25th, 2005.

4. Almeida J. Bordalo G., Dwinger P. (editors), *Lattices, semigroups and universal algebra*, Springer, 1990.

5. Almeida J., *Finite Semigroups and universal algebra*, World Scientific Publishing Company, 1995.

6. Amaral L. A., Scala A., Barthelemy M., Stanley H. E., *Classes of small-world networks*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 97 11149; 2000.

7. Barabási, A.-L. and Albert R., *Emergence of scaling in random networks*, Science 286, 509–512, 1999.

8. Barabasi A., *Linked: the new science of networks*, Perseus books group, 2002.

9. Benedetto J. J., Ferreira P. J. S. G. (editors), *Modern Sampling Theory*, Birkhauser, 2001.

10. Birkhoff G., *Lattice Theory*, AMS, 1948.

11. Birkhoff G., *Lattice Theory (3rd ed.)*, AMS, 1967.

12. Blyth T.S., *Lattices and ordered algebraic* structures, Springer-Verlag, 2005.

13. Boccara N., *Modelling Complex Systems*, Springer, 2004.

14. Bollobas B., *Random Graphs*, CUP, 2001.

15. Bollobas B., *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag, 2002.

16. Bosch S. *Algebra* Springer-Verlag, 2003.

17. Buchanan M., *Nexus. Perché la natura, la società, l'economia, la comunicazione funzionano allo stesso modo*, Mondatori, 2004.

18. Carringtom P. J., Scott J., Wassermann S., *Models and methods in social network analysis*, CUP, 2005.

19. Chartrand G., *Introductory Graph Theory*, Dover, 1984.

20. Cohen L., *Research Methods in Education*, RoutledgeFalmer, 2000.

21. Csermely P., *Weak Links: Stabilizers of Complex Systems from Proteins to Social Networks*, Springer, 2006.

22. Davey B. A., Priestley H. A., *Introduction to Lattices and Order*, CUP, 2002.

23. Davidson J., Ebel H, Bornholdt S., *Emergence of a small-world from local interactions: modelling acquaintance networks*, Physical Review Letters, volume 99, number 12, 2002.

24. Degenne A., Forsé M., *Introducing Social Networks*, SAGE Publications, 1994.

25. Diestel R., *Graph Theory*, Springer, 2000.

26. Dorogovisev S. N., Mendes J. F. F., Samukhin A. N., *Structure of growing networks with preferential linking*, Physical Review Letters, volume 85, number 21, 2000.

27. Dorogovisev S. N. Mendes J. F., *Evolution of Networks*, Advances in physics, Vol. 51, No. 4, 1079-1187, 2002.

28. Ebel H., Mielsch L., Bornholdt S., *Scale-free topology of e-mail network*, Physical Review E 66, 2002.

29. Engel K, Nagel R., *A short course on operator semigroups*, Springer, 2006.

30. Eriksen K. A., Hornquist M., *Scale-free growing networks imply linear preferential attachment*, Physical Review E, volume 65, 2001.

31. Godsil C., Royal G., *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.

32. Goh K. et. Al, *Classification of Scale-free networks*, PNAS Vol. 99 n° 20, ottobre 2002.

33. Guardiola X., Diaz-Guilera A., Pèrez C. J., Arenas A., Llas M., *Modelling diffusion of innovations in a social network*, Physical eview E 66, 2002.

34. Kalton G., *Introduction to survey sampling*, Sage Publications, 1983.

35. Klemm K., Eguiluz V. M., *Growing scale-free network with small-world behaviour*, Physical Review E, 65, 2002.

36. Krapivsky P. L., Redner S., Leyvraz F., *Connectivity of Growing Random Networks*, Physical Review Letters, volume 85, number 21, 2000.

37. Lang S., *Algebra*, Springer-Verlag, 2005.

38. Lang S., *Linear Algebra*, Springer-Verlag, 2000.

39. Lauer P. A., *An Education Research Primer: How to Understand, Evaluate and Use It*, Jossey-Bass, 2006.

40. Lodico M. G., Spaulding D. T., Voegtle K. H., *Methods in Educational Research: From Theory to Practice*, Jossey-Bass, 2006.

41. Morris M. (editor), Network *Epidemiology: A Handbook for Survey Design and Data Collection*, Oxford University Press, 2004.

42. Newman M. E. J., I. Jensen, Ziff *R*. M., *Percolation and epidemics in a two dimensional small-world*, Physical Review E, 65, 2002.

43. Park K., Lai Y., *Self-organized Scale-free networks*, Physical Review E 72, 2005.

44. Pattison P., *Algebraic Models for Social Networks*, CUO, 1993.

45. Sampath S., *Sampling Theory and Methods*, Alpha Science International, 2005.

46. Schwartz N., Cohen *R*., ben-Avraham D., Barabasi A., Havlin S., *Percolation in directed scale-free networks,* Physical Review E 66, 2002.

47. Terna P., Boero *R*., Morini M., Sonnessa M., *Modelli per la complessità*, Il Mulino, 2006.

48. Thompson S. K., *Sampling*, Wiley Series in Probability, 2002.

49. Trudeau *R*. J., *Introduction to graph theory*, Dover, 1994.

50. Tung *W*. K., *Group Theory in Physics*, World Scientific, 1985.

51. Watts, D. J., *Small Worlds*, Princeton University Press, 2004.

52. Watts D. J., Strogatz S. H*., Collective dynamics of "small-world" networks*, Nature, 393, 440-442, 1998.

Appendice

Esempi di soggetti accreditati dal MIUR per l'erogazione di attività di formazione (2007)

Soggetto	Ambito disciplinare prevalente
Accademia Internazionale "Padre Pio da Pietrelcina" Trinitapoli (FG)	Psico-Pedagogico, Handicap
Accademia Musicale "G. Marziali" Lissone (MI)	Discipline artistiche
Accademia Vesuviana di Tradizioni Etnostoriche Somma Vesuviana (Na)	Discipline artistiche scienze umane e sociali
ACINNOVA Società dell'Automobile Club di Milano	Ambiente e salute, Diritti fondamentali, Legalità e Cittadinanza
A.FO.RI.S. - LEA Agenzia di Formazione e Ricerca per lo Sviluppo Sostenibile	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
AGI - Associazione Grafologica Italiana Ancona (AN)	Handicap e svantaggio Orientamento
AGIDAE LABOR SMS Roma	Tecnologie dell'informazione e della comunicazione, sicurezza
A.I.C.A.T. Associazione Italiana Club Alcolisti in Trattamento Genova	Educazione alla salute
A.I.C.E.W. (AISAF) Pozzuoli (NA)	Handicap e svantaggio
AICQ Associazione Italiana Cultura Qualità	Organizzazione e gestione della scuola
AID Associazione Italiana Dislessia Bologna (BO)	Handicap e svantaggio
A.I.D.A.I. Associazione Italiana per i Disturbi dell'Attenzione e Iperattività COPPARO (FE)	Handicap e svantaggio
A.I.E.S. - Associazione Italiana Educatori dei Sordi SIENA (SI)	Handicap e svantaggio
A.I.P.R.E. Associazione Italiana di Psicologia Roma	Educazione alla salute dimensione relazionale
AKTIVA s.r.l. Rionero In Vulture (PZ)	Informatica, Tic, Multimedialità
AISLI Associazione Italiana Scuole di Lingue Trento	Linguistico moderno

ALETHEIA/ISSP Istituto di Studi Superiori Socio-Pedagogici	Informatica, TIC, Multimedialità
AMAT Accademia Mediterranea Arti-Terapia Modica (RG)	Discipline artistiche, handicap e svantaggio
A.N.Fa.MI.*V*. Associazione Nazionale delle Famiglie dei Minori con problemi di vista Udine	Handicap
A.C.L.E. - Associazione Culturale Linguistica Educational Sanremo (IM)	Area linguistica
ACOF Associazione Culturale Olga Fiorini	Informatica, tic, multimedialità
AGIS Associazione Generale Italiana dello Spettacolo Roma	Educazione teatrale e filmica
AIART ASSOCIAZIONE SPETTATORI Roma	Educazione ai linguaggi, multimedialità e cinematografici
AIPD Associazione Italiana Persone Down	Handicap e svantaggio
ANIPA Associazione Nazionale Informatici Pubblica Amministrazione Roma	Informatica, Tecnologie dell'informazione e della comunicazione, multimedialità
A.P.E. Agenzia per l'Educazione Napoli	Didattica e metodologie
APEIRON Centro per la Ricerca Psicoanalitica Roma	Didattica e metodologie Scienze umane e sociali
A.*R*.F.A.P Associazione per la Ricerca e la Formazione all'Aiuto Psicomotorio BASSANO DEL GRAPPA (VI)	Didattica e metodologie Scienze motorie
ARSAP Associazione Regionale per lo Sviluppo dell'Apprendimento Professionale	Informatica, tic, multimedialità
A.*R*.S.E.F. Associazione Regionale Studio, Educazione eFamiglia Napoli (NA)	Didattica e metodologie Informatica, tic, multimedialità
ASIS Associazione Stampa Italiana Scolastica MESSINA	Didattica e metodologie Informatica, tic, multimedialità
ASLICO Milano	Educazione musicale
ASPU Associazione per lo Sviluppo della Persona e del Potenziale Umano Napoli (NA)	Organizzazione e gestione della scuola, orientamento
Associazione Gruppo Abele TORINO	Diritti fondamentali, legalità e cittadinanza Didattica e metodologie
ASSOCIAZIONE CRESCERE FOGGIA (FG)	Ambiente e salute
Associazione Culturale "La scuola del fare" Castelfranco Veneto (TV)	Didattica e metodologie
Associazione Ambrosetti Arte Contemporanea Palazzolo sull'Oglio BS	Discipline artistiche

Associazione amici scuola Steineriana Milano	Didattica e Metodologie
Associazione "Azione per un Mondo Unito" Marino (RM)	Diritti fondamentali, legalità e cittadinanza
Associazione"Cultura e Formazione" Scafati (SA)	Tecnologie della informazione e della comunicazione gestione delle istituzioni scolastiche
Associazione Gioco e Studio in Ospedale Genova	Didattica in ospedale
Associazione "LaNostra Famiglia" Ponte Lambro (CO)	Handicap
Associazione culturale "Guido Barbieri" Voghera (PV)	Informatica, tic, multimedialità
Associazione Progettarsi Torino TO	Didattica e metodologie
Associazione Smile Sistemi e Metodologie Innovativi per il Lavoro e l'Educazione Roma	Didattica e metodologie - organizzazione e gestione della scuola
Associazione SPORTEC Napoli	Informatica, Tecnologie dell'informazione e della comunicazione, multimedialità
Associazione Temporanea Di Scopo Td Edu Migliarino Pisano (Pi)	Informatica, tic, multimedialità
British Council Roma	Linguistico moderno
British Institutes	Linguistico moderno
C.A.M. Centro per l'Apprendimento Mediato Rimini	Scienze umane e sociali
CeDRE - Centro di Documentazione e Ricerca EducativaCecina (LI)	Didattica e metodologie Handicap e svantaggio
CEIDA Centro Italiano di Direzione Aziendale Roma (RO)	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
C.E.I.M. Centro EducazioneIstruzione Mezzogiorno Mercato S. Severino (SA)	Didattica - valutazione
C.E.I.S. Centro Italiano Solidarietà Modena	Diritti fondamentali, legalità e cittadinanza
CeIS Centro Italiano Solidarietà Roma	Pluridisciplinare pedagogia della relazione
C.E.L.I.P.S Cultura e Lavoro Istituti Preziosissimo Sangue Bari (BA)	Informatica, tic, multimedialità
CEMEA Bagno a Ripoli (FI)	Didattica - handicap
Centro Educazione alla Danza"Mousike'" Bologna	Discipline artistiche
Centro di Documentazione Didattica "Le Corbinaie" Scandicci (FI)	Didattica e metodologie

Centro di Orientamento "Don Bosco" Andria (BA)	Didattica e metodologie Orientamento
Centro di Solidarietà Firenze	Handicap e svantaggio orientamento
Centro DocumentazionePedagogico Casalecchio di Reno (BO)	Educazione ambientale - intercultura - T.I.C.
Centro di Psicologia e AnalisiTransazionale Milano	Tecnologie della informazione e della comunicazione psicologia relazionale
Centro Espressioni Cinematografiche Udine	Linguaggio cinematografico
Centro di Documentazione Città di Arezzo AREZZO (AR)	Intercultura
CE.RI.PE. Centro Ricerca Pedagogica Napoli	Gestione delle istituzioni scolastiche
Ce.VI Centro di volontariato internazionale per la cooperazione allo sviluppo PADERNO (UD)	Diritti fondamentali, legalità e cittadinanza Intercultura
Centro Gulliver Varese	Scienze Umane e sociali
Centro Provinciale di Documentazione per l'Integrazione Parma	Disagio
Centro Risorse Educative Didattiche Firenze	Didattica e metodologie Handicap e svantaggio
Centro Rogeriano Pisa	didattica e metodologie
Centro Studi e Servizi Scuola 2000 S. Anna (LU)	Informatica, tic, multimedialità, Discipline artistiche
Centro Studi e Ricerche Psico-Pedagogiche ad Orientamento Gestaltico"HOLOS" Siracusa	Area Pedagogica e Psico-pedagogica
CentroStudi Formazione Superiore Milano	Discipline artistiche
Centro Studi Martha Harris Firenze	Didattica e metodologie scienze umane e sociali
Centro Studi Musica & Arte Firenze	Discipline Artistiche
Centro Studi Erickson Gardolo (TN)	Handicap - multimedialità
Centro Studi per la Ricerca e la Didattica della Storia "Francesco Daniele" Caserta (CE)	Scienze umane e sociali
Centro Terapia Relazionale Tremestieri Etneo (CT)	Handicap e svantaggio - orientamento
Ce.P.A.S.A. di Spoleto Centro Psicologia Applicata e Studi sull'Apprendimento Assisi (PG)	Handicap e svantaggio, Diritti fondamentali, legalità e cittadinanza, Didattica e metodologie
CESES Centro Europa Scuola Educazione e Società Milano	Tecnologie della informazione e della comunicazione, dimensione europea

C.E.U. Centro Studi per l'Evoluzione Umana Roma	Scienze umane e sociali
CIDAF - Consultorio Interprovinciale di Assistenza Familiare Brescia (BS)	Handicap e svantaggio Ambiente e salute
CIDIEP Centro di documentazione, informazione, educazione ambientale e ricerca per l'area padana Colorno (PR)	Ambiente e salute
CIELLEA MINERVA NAPOLI (NA)	Didattica e metodologie Normativa, organizzazione e gestione della scuola
CIES Centro Informazione Educazioneallo Sviluppo Roma	Intercultura
C.I.F. Centro Italiano Femminile Roma	Metodologie didattiche
CIID Cooperativa Insegnanti di Iniziativa Democratica Roma	Tecnologie della informazione e della comunicazione pluridisciplinare
C.I.L.I.S. Cooperativa Interpreti di Lingua dei Segni Boscoreale (NA)	Handicap e Svantaggio
Cinemazero Pordenone	Educazione filmica
CIOFS/Scuola FMA Centro Italiano Opere Femminili Salesiane Roma (RO)	Informatica, tic, multimedialità Normativa, organizzazione e gestione della scuola
CISEM Centro per l'Innovazione e la Sperimentazione Educativa Milano	Organizzazione e gestione della scuola
CNOS/Scuola Centro Nazionale Opere Salesiane/Scuola Roma	Informatica, Tic, Multimedialità - Organizzazione E Gestione Della Scuola
CNUPI Confederazione Nazionale delle Università Popolari Italiane Montecompatri (RM)	Handicap - multimedialità
Consorzio BAICR Sistema Cultura Roma	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
Consorzio Pracatinat Finestrelle Torino	Ambiente e Salute Organizzazione e Gestione della Scuola
Cooperativa Progetto Con-Tatto Pavia (PV)	Intercultura
COOPERATIVA "Sistema Multi Proposta" Pinerolo (TO)	Didattica e metodologie, scienze umane e sociali
COSPComitato Provinciale per l'orientamento scolastico e professionale Verona	Orientamento
COSPES - Centro di Psicologia Clinica ed Educativa Milano	Didattica e Metodologie Handicap e Svantaggio
CPP Centro Psicopedagogico per la Pace Piacenza	Didattica e metodologie, intercultura

CSI Centro Sportivo ItalianoRoma	Attività motorie
CVM Comunità Volontari per il Mondo Ancona	Intercultura
Fondazione CUOA - Centro Universitario di Organizzazione Aziendale Altavilla (VI)	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
DIDAGROUP Roma	Informatica, Tecnologie dell'informazione e della comunicazione, multimedialità
DIDASCO Milano	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
DIDASCO Consorzio Nazionale Formazione Napoli (NA)	Gestione delle istituzioni scolastiche Tecnologie dell'informazione e della comunicazione
DILIT INTERNATIONAL HOUSE Roma (RM)	Linguistico moderno
EDITRICE LA SCUOLA Brescia	Didattica e metodologie
EDS Electronic Data Systems Italia SpA Milano	Informatica, tic, multimedialità
E.F. Education/Englishtown Milano	Linguistico moderno
ELEA S.p.A. Ivrea (TO)	Tecnologie della informazione e della comunicazione, gestione delle istituzioni scolastiche
ENAC Ente Nazionale Canossiano Verona	Orientamento
ENADIL Latina LT	Informatica, tic, multimedialit
ENAIP Ente ACLI Istruzione Professionale Friuli Venezia-Giulia Trieste	Didattica e metodologie, informatica, tecnologie dell'informazione e della comunicazione, multimedialità
EUROCOMIND S. Mauro Torinese (TO)	Normativa, organizzazione e gestione della scuola Informatica, tic, multimedialità
Federazione Italiana del CLUB UNESCO Firenze	Tecnologie della informazione e della comunicazione intercultura educazione ai diritti umani
FIAeF Federazione Italiana Aerobica e Fitness Roma	Educazione motoria
FIDAE Federazione Italiana di Attività Educative Roma	Gestione delle istituzioni scolastiche, qualità, tecnologie della informazione e della comunicazione, multimedialità
F.I.M. Federazione Italiana Musicoterapeuti BERGAMO	Discipline artistiche Handicap e svantaggio
Fondazione Adolescere Voghera (PV)	Scienze motorie
Fondazione AIDA Associazione Italiana Diffusione Artistica VERONA (VR)	Discipline artistiche
Fondazione Don Carlo Gnocchi onlus Milano (MI)	Didattica e metodologie Informatica, tic, multimedialità

Fondazione "Camminiamo Insieme" Salerno	Handicap
Fondazione Ernesta Besso Roma	Handicap, intercultura
Fondazione IARDMilano	Didattica e metodologie
FORM & INFORM Roma	Multimedialità
Fondazione IDIS Città della Scienza Napoli	Didattica della scienza - Tecnologie dell'informazione e della comunicazione
FORUM Solidarietà Centro di Servizi per il Volontariato Parma	Intercultura
Fratelli dell'Uomo Milano	Diritti fondamentali, legalità e cittadinanza - Intercultura
GARAMOND Editoria e Formazione Roma	Tecnologie della informazione e della comunicazione, multimedialità
Genitori Per Il Bilinguismo Bolzano	Area linguistica
GI Gruppo Immagine Trieste	Discipline artistiche
Goethe-Institut Roma	Linguistico moderno
GIUSEPPE OLIVOTTI *s*.c.*s*.r.l. Mira (VE)	Ambiente e salute
Gruppo CLAS *s*.r.l. Milano	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
Gruppo Editoriale Motta Milano	Tecnologie dell'informazione e della comunicazione, multimedialità
Gruppo L2 *s*.a.*s*. Terni	Linguistico moderno
HEART CARE FOUNDATION	Ambiente e salute
Il Melograno Pavia (PV)	Scienze motorie
IMES Istituto Meridionale di Storia e Scienze Sociali Roma	Scienze umane e sociali
Impresa & Management Roma	Informatica, TLC, multimedialità - Organizzazione e gestione della scuola
International Language School Roma	Linguistico moderno
Istituto Italiano di Psicologia della Relazione ZELARINO (VE)	Handicap e svantaggio
INIPA Istituto Nazionale Istruzione Professionale Agricola Roma	Ambiente e salute
I.RI.GEM. Rosà (VI)	Tecnologie, formazione a distanza, metodologie didattiche
ISFAR – Istituto Sistemi Formativi Avanzati e Ricerche ENNA (EN)	Handicap e svantaggio Normativa organizzazione e gestione della scuola
Istituto di Cultura Italo-Tedesco Padova	Area linguistica

ISTITUTO IARD Franco Brambilla Milano	Organizzazione e Gestione della scuola
IMSU Istituto Mediterraneo Studi Universitari Siracusa	Didattica e Metodologie Organizzazione e Gestione della Scuola
IACP Istituto dell'Approccio Centrato sulla Persona Roma	Ambiente e salute
Istituto di Cultura Italo-Tedesco Padova	Area linguistica
IKOS AgeForM Agenzia di Formazione e Mediazione Bari	Tecnica e tecnologie
Insight Analisi Formazione Sviluppo Cagliari	didattica e metodologie
IPE Istituto per Ricerche ed Attività Educative NAPOLI (NA)	Didattica e metodologie Orientamento
INSMLI Istituto Nazionale per la Storia del Movimento di Liberazione in Italia Milano	Scienze umane e sociali
IPSEF S.*R*.L. Istituto per la Promozione e lo Sviluppo della Educazione e Formazione Benevento	Tecnologie della informazione e della comunicazione, didattica e formazione
I.F.*R*.E.P. Istituto di Formazione e Ricerca per Educatori e Psicoterapeutii Roma	Metodologie didattiche - psicologia relazionale
IRIFOR -Istituto per la Ricerca, la Formazione e la Riabilitazione ROMA (RM)	Handicap e svantaggio
ISFAR Istituto Superiore Formazione, Aggiornamento, Ricerca FIRENZE	Scienze Umane e Sociali
ISMEDA Istituto Superiore Metodologie in Direzione Aziendale Roma	Formazione manageriale
ISMO *s*.r.l. Milano	Gestione delle istituzioni scolastiche
Istituto Antoniano Ercolano (NA)	Handicap e svantaggio
Istituto dei Sordomuti di Torino Pianeza (TO)	Handicap e svantaggio
ISTITUTO GESTALT DI PUGLIA ARNESANO (LE)	Scienze umane e sociali
Istituto "Leonarda Vaccari" Per La Rieducazione Dei Fanciulli Minorati	handicap e svantaggio
ISPEF Istituto Scienze Psicologiche della Educazione e della Formazione Roma	Didattica, orientamento, valutazione
ISPI Istituto Superiore di Studi di Servizio Sociopsicopedagogico Italiano Sapri (SA)	Handicap e svantaggio
ISSEC Istituto per la Sperimentazione Educativa e Culturale Palermo	Didattica e metodologie - Scienze umane e sociali
ISSR Istituto Superiore di Scienze Religiose	Scienze umane e sociali

Milano	
ISTITUTO BENALBA per l'Aggiornamento e la Formazione Napoli	Multimedialità, handicap
Istituto GESTALT Bologna	Scienze umane e sociali
Istituto PANGEA onlus Sabaudia (LT)	Ambiente e salute - scienze sperimentali
Istituto Pasquali-Agazzi Centro Studi Pedagogici Brescia	Scienze umane e sociali
Italian in Italy Associazione di scuole di lingua e cultura italiana Roma	Intercultura Linguistico moderno
ITALIA NOSTRA Roma	Ambiente e salute
Italia Solidale del Volontario per lo Sviluppo di Vita e Missione Roma	Educazione alla salute - Educazione alla solidarietà
ITER Institute for Training, Education and Research Firenze	Lingua italiana - Organizzazione e gestione della scuola
Laboratorio di Documentazione e Formazione Bologna	Tecnologia informatica
LA BOTTEGA DEL PENSIERO CAGLIARI (CA)	Handicap e svantaggio
LANGUAGE STUDY LINK "TORRE DI BABELE" Roma (RM)	Linguistico moderno
Le Chiavi della città Firenze	Discipline artistiche - intercultura
LIBERA Roma	Educazione alla legalità
LIONS QUEST ITALIA Roma	Scienze umane e sociali
M.A.C. Movimento Apostolico Ciechi Roma	Handicap e svantaggio
MANICOMICS Teatro Piacenza	Didattica e metodologie, Discipline artistiche
MED Media Education Roma	
MEDIATION ARRCA Associazione per la Ricerca sulla Educabilità Cognitiva e l'Apprendimento Mediato Torino	Didattica e metodologie - Scienze umane e sociali
Mediterraneo formanagement Roma	Tecnologie della informazione e della comunicazione, orientamento
MEMO – Multicentro Educativo Modena "S. Neri" MODENA (MO)	Handicap e svantaggio
Michelangelo s.r.l. Somma Vesuviana (NA)	Didattica e metodologie Informatica, tic, multimedialità
MUSEI COMUNALI Rimini	Educazione musicale
NACIP Scuola Nazionale Centro Formazione Professionale e Culturale	Handicap e svantaggio - Informatica, tecnologie della informazione e della comunicazione, multimedialità,

Potenza	organizzazione e gestione della scuola
Opera Nazionale Montessori Roma	Scienze umane e sociali
OPPI Organizzazione per la Preparazione Professionale degli Insegnanti Milano	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
OSMO Opera della Scuola Magistrale Ortofrenica "G. F. Montesano" Roma	Didattica e metodologie
PATTO FORMATIVO Roma	T.I.C. Educazione religiosa
PEGASO Centro Studi Formazione Ricerca Consulenza Mantova	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
PRH ITALIA Personalità e Relazioni Umane Torino	Gestione delle istituzioni scolastiche, psicologia relazionale
Prisma Consulenza formazione/ricerca Napoli	Informatica, TLC, Multimedialità - Organizzazione e gestione della scuola
PROGED Ente Cooperativistico a r.l. Napoli	Tecnologie della informazione e della comunicazione, aggiornamento disciplinare
RIDERE PER VIVERE Roma (RM)	Ambiente e salute Didattica e metodologie
RUE Risorse Umane Europa Udine	Intercultura
Scuola Popolare di Musica Donna Olimpia Roma	Educazione musicale
Scena Mobile Soc. Coop. a r. l. Napoli	educazione teatrale
SIMEOS Società Italiana di Musica Elementare Metodo Orff-Schulwerk Verona	Educazione musicale
SIPP Società Italiana di Psicologia e Pedagogia Perignano (PI)	Area psico-pedagogica, prevenzione e recupero disagio
Slow Food Prato (PO)	Educazione alimentare
Società Italiana delle Storiche Roma	Scienze Umane e Sociali
SOGEA Scuola di Formazione Aziendale Genova	Normativa, organizzazione e gestione della scuola
SPAZIOMIMO Milano (MI)	Discipline artistiche Scienze motorie
STUDIO STAFF Napoli	Discipline artistiche
Teatro Comunale di Ferrara Ferrara	Discipline Artistiche
Teatro delle Briciole Parma	
The IH Professional Development Centre Livorno	linguistico moderno
TRINITY College London Prato (PO)	Linguistico moderno
Trasparency International Italia Milano	Diritti Fondamentali, Legalità e Cittadinanza

UCODEP - Unity and cooperation for the development of peoples Arezzo (AR)	Informatica, tic, multimedialità Intercultura
Università aperta Giulietta Masina e Federico Fellini Rimini	Innovazione metodologica - Psicologia - Educazione visiva
U.N.L.A. Unione Nazionale per la Lotta Contro l'Analfabetismo Roma	Tecnologie della informazione e della comunicazione, gestione delle istituzioni scolastiche
UISP Unione Italiana Sport per Tutti Roma	Educazione motoria
UNICEF Roma	Intercultura
UPTER Università Popolare di Roma	Tecnologie della informazione e della comunicazione
Veneto Agricoltura Legnaro (PD)	Ambiente e Salute