INVALSI

PROGETTO FINVALI 2005

Progetto 032: Il sistema scolastico come sistema complesso: qualità delle rivelazioni e modelli di interpretazione dei risultati

Istituto per le Applicazioni del Calcolo 'Mauro Picone' del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Sede di Napoli

Dipartimento di Statistica e Matematica per la Ricerca Economica, Università degli Studi di Napoli 'Parthenope'

Con la partecipazione di

Dipartimento di Statistica, Università degli Studi di Milano Bicocca

Dipartimento di Scienze della Terra, Università degli Studi di Napoli 'Federico II'

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Napoli 'Federico II'

INVALSI

PROGETTO FINVALI 2005

Progetto 032: Il sistema scolastico come sistema complesso: qualità delle rivelazioni e modelli di interpretazione dei risultati

Report dicembre 2006: Comportamento frattale delle abilità degli studenti

Umberto Amato[1]**, Nicola Fusco**[2]**, Adriano Mazzarella**[3]**, Carlo Sbordone,**[2]

[1] Istituto per le Applicazioni del Calcolo 'Mauro Picone' del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Sede di Napoli

[2] Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Napoli 'Federico II'

[3] Dipartimento di Scienze della Terra, Università degli Studi di Napoli 'Federico II'

Abstract: Il report si prefigge lo scopo di verificare sperimentalmente se si riscontra una qualche struttura frattale all'interno dei dati di abilità degli studenti, senza fare alcuna ipotesi riguardo le interazioni possibili tra gli studenti e l'ambiente circostante (Professori, Istituti, ambiente sociale) e tra gli studenti stessi. L'analisi è stata effettuata su dati grezzi non controllati qualitativamente. Il report mostra che un comportamento frattale è chiaramente visibile per le scuole medie inferiori, mentre risulta dubbio per le scuole elementari.

Indice

1. Introduzione

Uno degli obiettivi del presente progetto FINVALI è valutare la possibilità di vedere il Sistema Scolastico come Sistema Complesso (si veda a tale proposito il report introduttivo "Analisi della letteratura sui Sistemi Complessi pertinente al Sistema Scolastico"). Un approccio di tipo sperimentale-empirico al problema consiste nel valutare se il Sistema Scolastico ammette in qualche sua variabile un comportamento frattale. È noto infatti che la presenza di un siffatto andamento è un indicatore significativo del fatto che l'intero sistema, aldilà della variabilità intrinseca apparentemente senza struttura che lo contraddistingue, presenta delle similarità di comportamento a diverse scale che presuppongono una struttura che lo regola. Scopo della ricerca sui Sistemi Complessi sarà tentare di modellizzare tale struttura nascosta.

Nel presente report si adotterà l'approccio sperimentale-empirico, vale a dire si cercherà di verificare sperimentalmente se si riscontra una qualche struttura frattale all'interno dei dati di abilità degli studenti, senza fare alcuna ipotesi riguardo le interazioni possibili tra gli studenti e l'ambiente circostante (Professori, Istituti, ambiente sociale) e tra gli studenti stessi.

Nella prima fase del progetto verranno considerate in particolare le distribuzioni delle abilità, la grandezza fondamentale del Sistema Scolastico: verranno analizzati 2 ordini di scuola (elementare e media) e le diverse regioni. L'analisi verrà effettuata sui dati grezzi (vale a dire non passati attraverso il controllo di qualità previsto nel progetto), per cui le indicazioni che emergeranno saranno da confermare nella seconda fase del progetto. Verranno mostrati solo i dati relativi all'anno scolastico 2004-2005,

2. Fondamenti teorici

2.1 Introduzione

Si è soliti associare la semplicità e la regolarità di un fenomeno alla sua predicibilità: per esempio l'orbita terrestre attorno al Sole è semplice e regolare e noi siamo in grado di prevedere quando verrà, per esempio, il tempo dell'estate astronomica. Viceversa la complessità e l'irregolarità dei fenomeni sono spesso associati alla loro impredicibilità. La natura e in generale il mondo che ci circonda sono permeati da simili fenomeni (si pensi solo alle nuvole, alla loro formazione e alla loro enorme variabilità). La domanda che ci si pone è se l'irregolarità riscontrata nei fenomeni è completamente casuale oppure se c'e' qualche struttura, qualche ordine al loro interno.

Nelle ultime decadi sono stati sviluppati nuovi punti di vista su come osservare e, possibilmente, modellizzare la complessità presente nel mondo e nella natura. Un esempio illuminante è costituito dalla Teoria del Caos, definito come la casualità generata da sistemi deterministici, anche di tipo semplice, e dovuta alla sensitività che mostrano i sistemi a variazioni delle condizioni iniziali. In questo caso una struttura apparentemente irregolare e senza ordine, presenta una struttura ben precisa, proprio perché frutto di un sistema deterministico.

2.2 Dimensione frattale

Da sempre la trattazione dei sistemi dinamici è stata sempre indissolubilmente associata alla geometria frattale sin dalla sua formalizzazione (Mandelbrot, 1977). Il concetto più importante su cui si basa la Teoria è costituito dalla dimensione frattale.

È noto a tutti il concetto di dimensione di uno spazio (uno spazio a 1 dimensione è associato alle linee, a due dimensioni ai piani, a tre dimensioni ai volumi). In una dimensione, un segmento di lunghezza L può essere diviso in N parti, ciascuno avente lunghezza l; si dice allora che ciascuna delle parti non è altro che una versione rimpicciolita di un fattore $m_1=1/N$ del segmento originario, o, equivalentemente, che ingrandendo ciascuna di queste parti di un fattore L/l si riottene il segmento originario. Si dice allora che la linea è una struttura autosimilare, in quanto una piccola porzione se ingrandita può riprodurre in maniera esatta una porzione più grande. Si tratta di un tipo di simmetria che prende il nome di invarianza di scala.

A due dimensioni la struttura è costituita da un quadrato in un piano avente lato L; ciascun lato (segmento) può essere diviso in N parti autosimilari di lato l; ciascuna parte di quadrato così ottenuta sarà un rimpicciolimento del quadrato originario di un fattore $m_2 = 1/\sqrt{N}$; in pratica se ingrandiamo ciascuna delle parti di un fattore L/l si riottene la struttura originaria del quadrato. Analogamente nel caso tridimensionale un cubo solido avente lato L può essere diviso in N cubi più piccoli rimpiccioliti di un fattore $m_3 = N^{1/3}$. Avremo $m_1 = 1/N$, $m_2^2 = 1/N$, $m_3^3 = 1/N$ e in generale $m_D^D = 1/N$, dove D = 1 per la linea, D = 2 per il quadrato, D = 3 per il cubo. In generale definiamo la dimensione della similarità (o dimensione frattale) come

$$D = \frac{\log N}{\log 1/m}$$

dove N è il numero delle parti in cui è rimpicciolito un oggetto a causa di un rimpicciolimento di m della struttura autosimilare originaria.

Vedremo ora con un classico e semplice esempio che le strutture geometriche nello spazio possono avere dimensioni della similarità diverse dai numeri interi come nel caso di linee, quadrati e cubi.

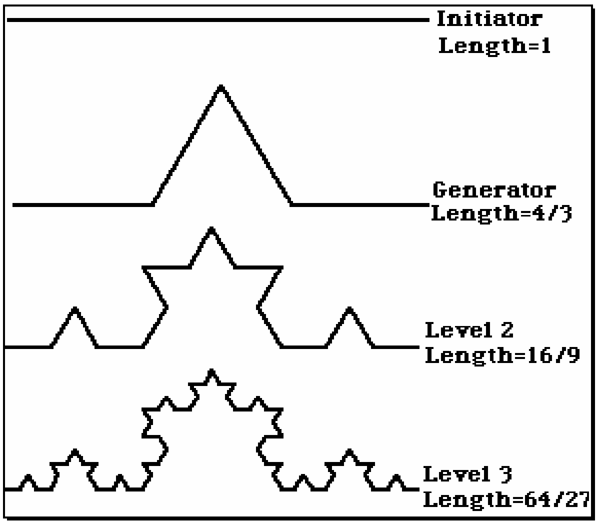
Osserviamo innanzitutto che possiamo scrivere

$$N(l) \propto l^{-D},$$

vale a dire il numero di parti che si ottengono della struttura dividendo i suoi segmenti iniziali in segmenti di lunghezza l è inversamente proporzionale a l elevato alla dimensione frattale D.

Questa semplice osservazione fornisce un modo generale di calcolare la dimensione frattale di un oggetto racchiuso in uno spazio n-dimensionale, metodo noto con il nome di box counting: basterà ricoprire l'oggetto con una griglia n-dimensionale di grandezza l_1 e contare il numero $N(l_1)$ di elementi della griglia che contengono almeno un pezzo dell'oggetto. La procedura va ripetuta per diverse spaziature della griglia $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Infine è sufficiente fare il grafico del logaritmo di $N(l_1), N(l_2), \ldots, N(l_n)$ in funzione del logaritmo di $l_1, l_{2,}\dots, l_n$. Se la curva risultante mostra un andamento lineare su un'ampia scala di valori di l, allora la pendenza della retta sarà una stima della dimensione frattale.

Consideriamo ora la curva di Kock, un esempio famosissimo e semplice di struttura avente una dimensione frattale non intera. Al primo passo abbiamo un segmento di lunghezza L; per il secondo passo dividiamo il segmento in tre parti uguali di lunghezza $L/3$ e sostituiamo quello centrale con due segmenti ancora di lunghezza $L/3$ in modo da formare un triangolo equilatero; al terzo passo eseguiamo la stessa procedura su ognuno dei segmenti e così via fino ad ottenere la curva di Koch.



È facile calcolare che al termine di ogni passo la lunghezza totale della curva la lunghezza totale della curva aumenta di un fattore 4/3. Si dimostra inoltre che la dimensione frattale della curva di Koch è D = 1.26. Tornando all'esempio monodimensionale della linea, se misuriamo la lunghezza della linea con un righello di lunghezza l otterremo una lunghezza totale pari a $L(l) = N(l)l \propto l^{'-D} l = l^{1-D}$ e poiché la dimensione frattale $D = 1$ otteniamo che la lunghezza totale è costante indipendentemente dalla lunghezza del righello l. Se applichiamo la stessa procedura alla curva di Koch otterremo invece, poiché $D > 1$ e $l \to 0$, $L(l) \to \infty$. Pertanto la lunghezza della curva varierà con la lunghezza del righello che useremo per misurarla.

Il righello rappresenta visivamente un concetto di risoluzione spaziale, per cui risulta evidente che le proprietà dell'oggetto frattale sono dipendenti dalla risoluzione. Una simile relazione può essere riscontrata in numerose strutture non necessariamente autosimilari. L'esempio più noto riguarda la lunghezza di una costa che può essere calcolata a diverse risoluzioni, corrispondenti per esempio a diverse carte geografiche ottenute con scale di riduzioni diverse: in questo caso un pezzo di costa quando ingrandito su una scala di riduzione minore ha lo stesso aspetto ma non è esattamente identico al pezzo alla scala di riduzione più bassa e la sua lunghezza misurata cambierà.

L'esistenza di una relazione lineare tra $\log L(l)$ e $\log l$, e quindi l'esistenza di un coefficiente *D*, indica che le piccole scale sono collegate alle scale grandi per mezzo della dimensione frattale. Questo tipo di scaling viene chiamato autosimilarità e riflette il fatto che la struttura può apparire statisticamente simile pur essendo diversa in dettaglio a scale differenti.

Esistono in letteratura diverse altre dimensioni frattali che è possibile definire. Allo stesso modo si può dimostrare che simili strutture di autosimilarità possono essere definite e riscontrate anche in processi temporali e nelle corrispondenti serie temporali.

3. Stima della dimensione frattale delle abilità

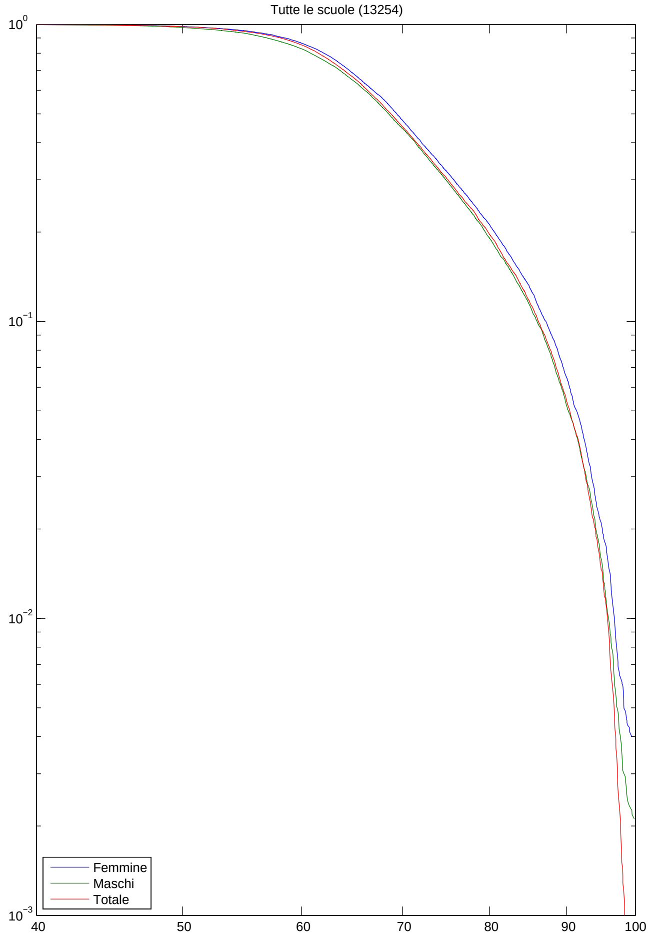
Presentiamo ora un'analisi della dimensione frattale delle abilità degli studenti stimata a partire dai dati del Sistema di Valutazione Nazionale nell'anno scolastico 2004-2005.

A tale scopo consideriamo la funzione 1 - $P(\alpha)$, con $P(\alpha)$ la funzione cumulativa della densità di probabilità delle abilità α degli studenti (vale a dire la funzione che restituisce la frazione di studenti aventi un'abilità minore di α) e ne tracciamo il grafico in scala logaritmica su ambedue gli assi ($\log(1-P(\alpha))$ vs. $\log(\alpha)$). Un siffatto modello è concettualmente simile a quello di box counting visto per la stima della dimensione frattale di una curva.

Considereremo innanzitutto l'analisi in termini di abilità definita come la percentuale di risposte esatte fornite dagli studenti (valori medi per Istituto); l'analisi per le abilità stimate mediante Item Response Theory a 3 parametri non verrà mostrata perché ha prodotto risultati simili.

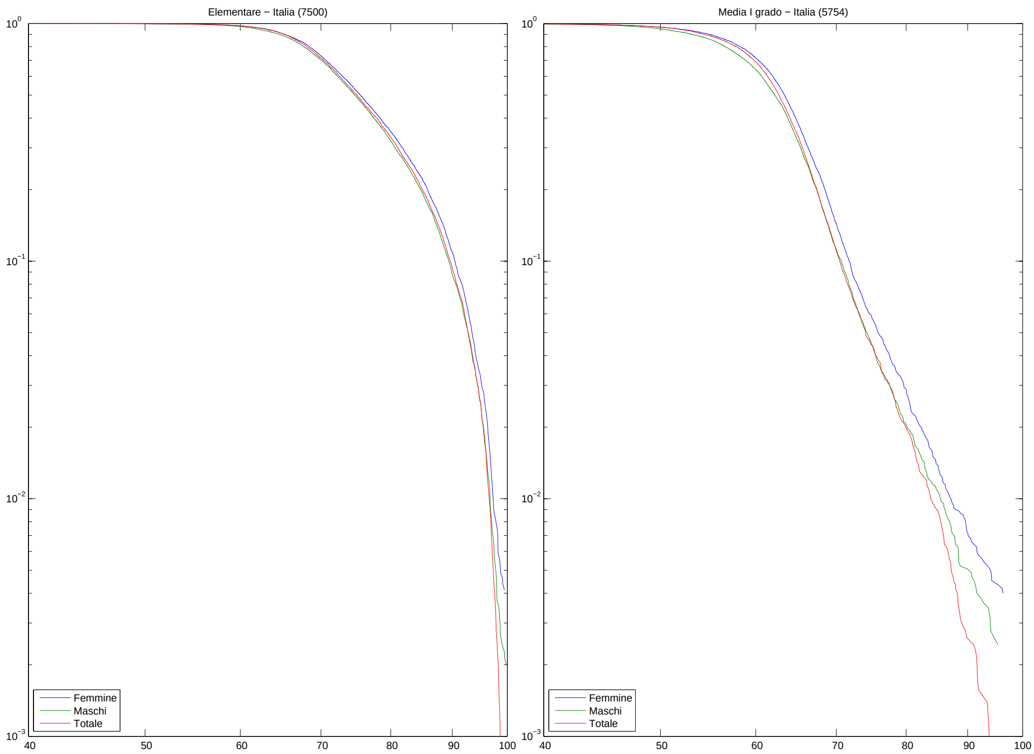
Allo stesso modo non verranno mostrati i grafici relativi all'anno scolastico 2005-2006.

La Figura seguente mostra il grafico $\log(1-P(\alpha))$ vs. $\log(\alpha)$ per tutti i campioni disponibili (Scuole elementari, Scuole medie inferiori, tutte le regioni) per un totale di 13254 Scuole.



Innanzitutto osserviamo che sul grafico vengono riportate 3 curve relative a gli studenti di sesso maschile (verde), femminile (blu) e a tutti gli studenti (rosso). Una prima analisi rivela che l'andamento frattale della valutazione risulta dubbio, in quanto la zona di linearità del grafico è limitata ad una range piuttosto piccolo delle abilità (all'incirca tra il 70% e l'80%). Il dato risulta omogeneo per sesso.

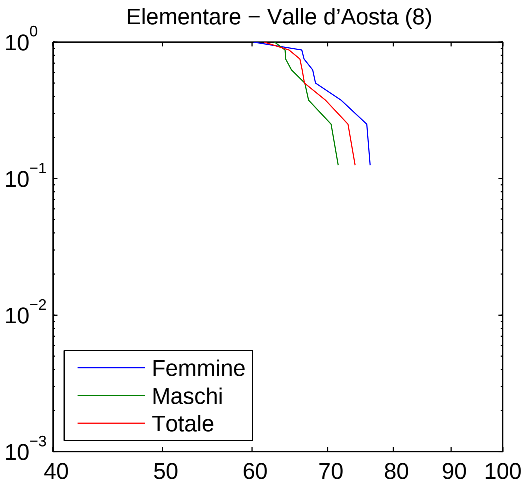
Consideriamo pertanto lo stesso tipo di grafico disaggregato per tipo di scuola (elementare, 7500 scuole, e media inferiore, 5754 scuole) ma cumulando tutte le regioni:

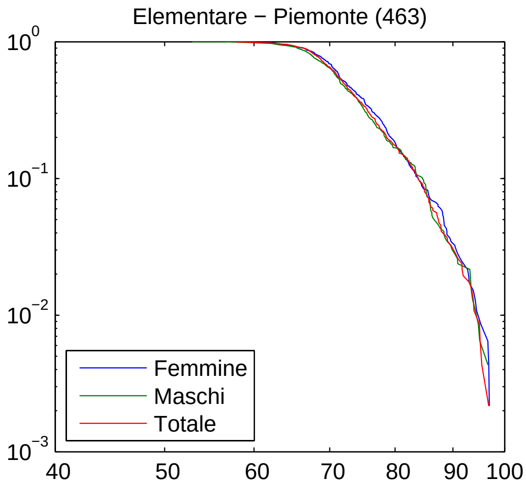


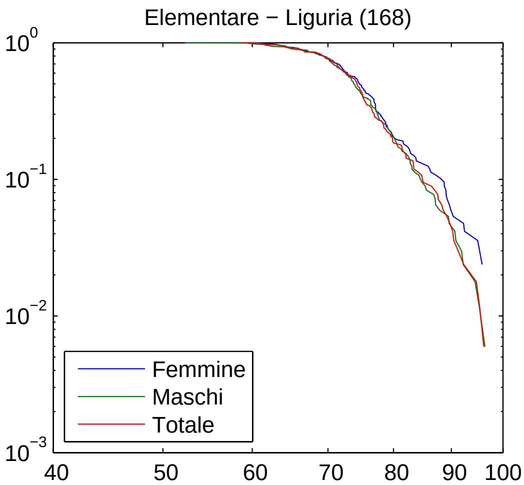
È possibile notare in maniera evidentissima il diverso comportamento assunto dalle scuole elementari e da quelle medie inferiori: il comportamento frattale che è dubbio per le scuole elementari è invece evidentissimo per quelle medie inferiori per un ampio range del valore delle abilità. Il dato risulta ancora una volta omogeneo tra maschi e femmine.

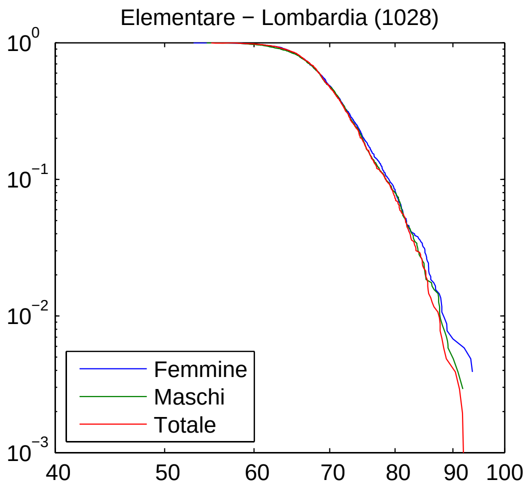
3.1 Dimensione frattale per le scuole elementari

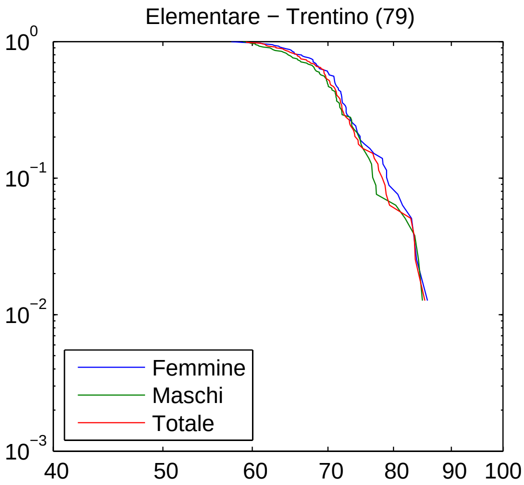
Riportiamo ora l'andamento del grafico per le scuole elementari disaggregato per regioni. È evidente che il dato nazionale non risulta omogeneo per regioni: l'andamento frattale sembra evidente per le regioni del Nord e alcune del Centro ma assente per quelle del Sud. Continua invece a valere l'omogeneità per sesso.

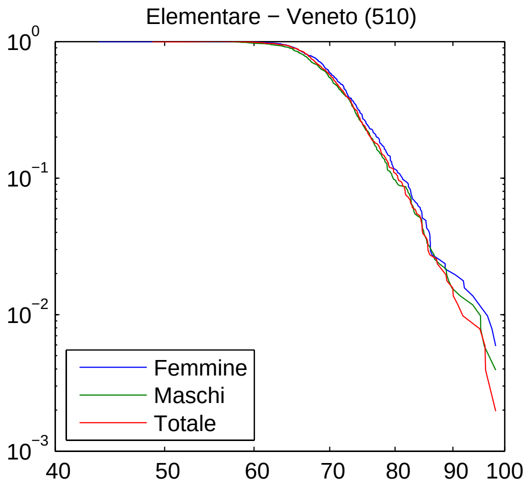

Elementare − Valle d'Aosta (8)
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

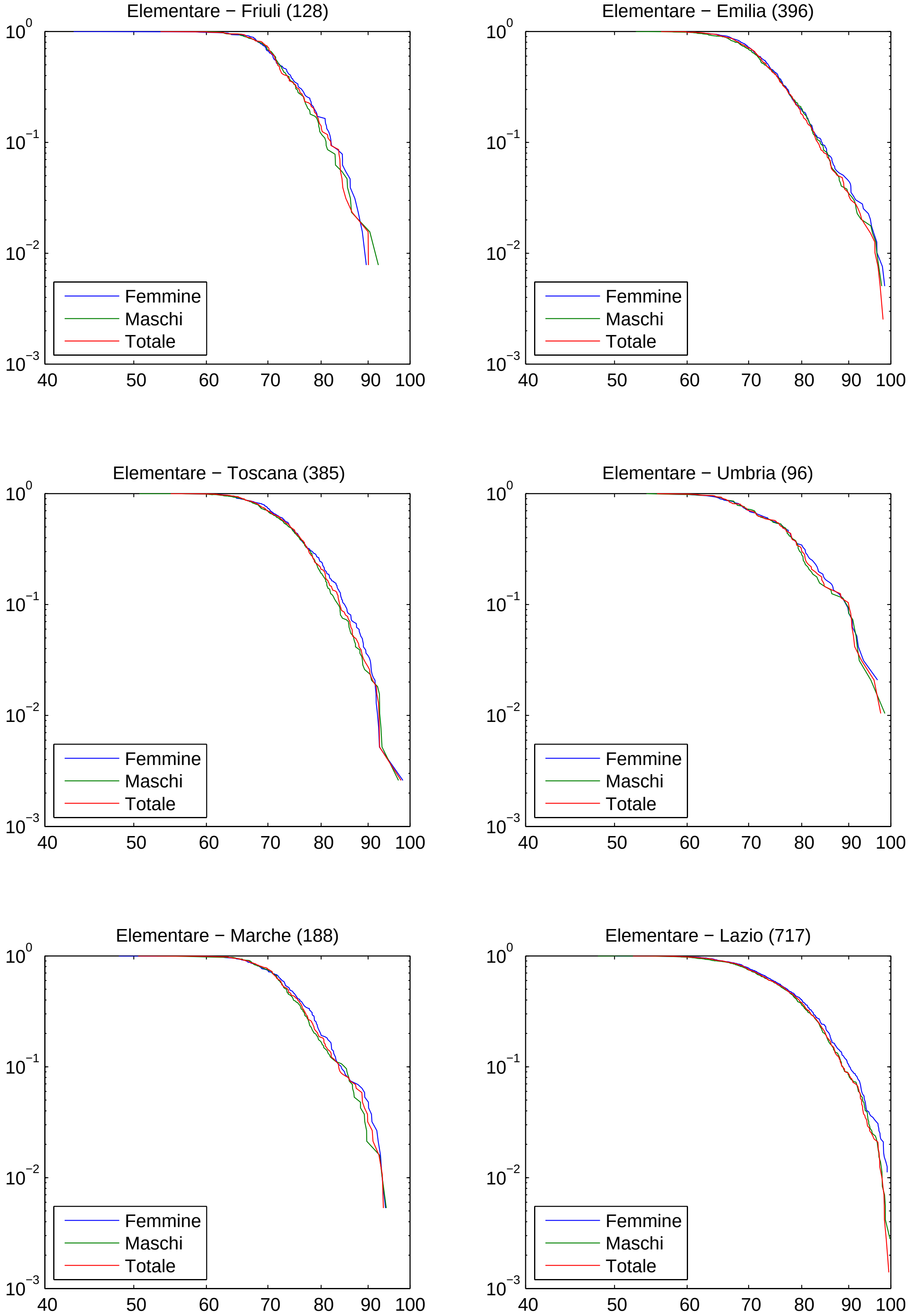

Elementare − Piemonte (463)
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

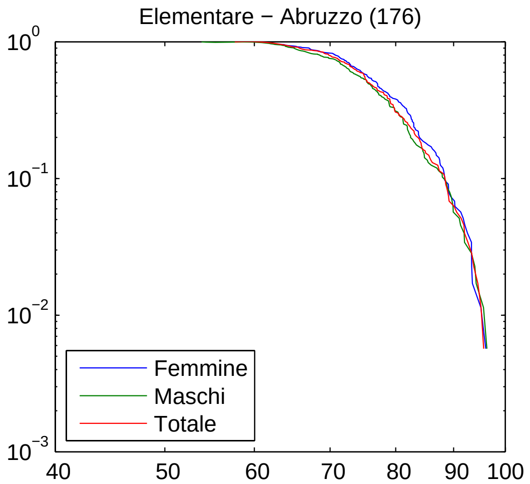

Elementare − Liguria (168)
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

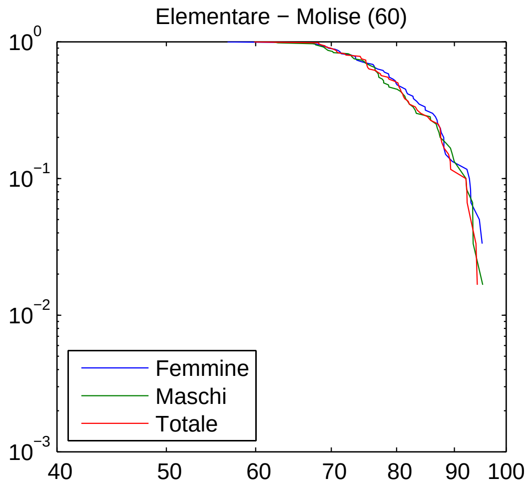

Elementare − Lombardia (1028)
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

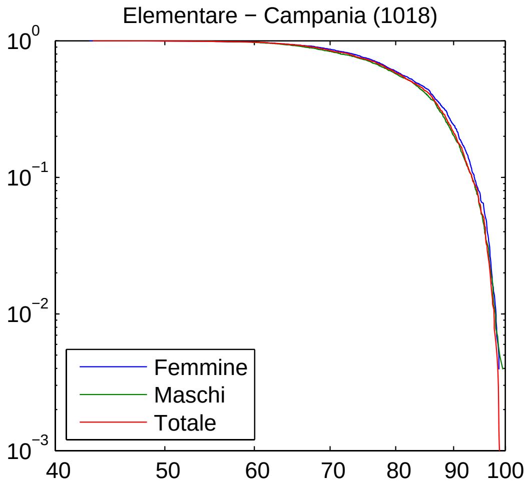

Elementare − Trentino (79)
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

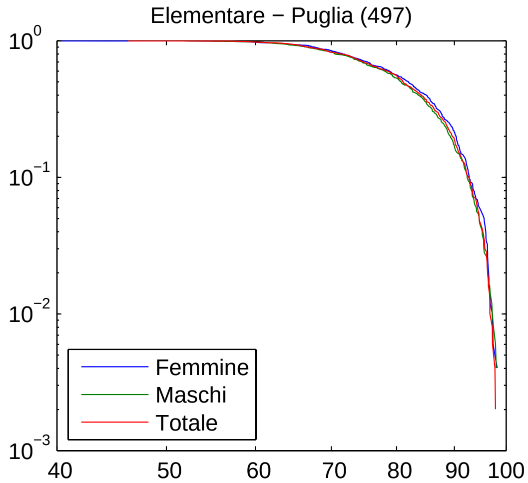

Elementare − Veneto (510)
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

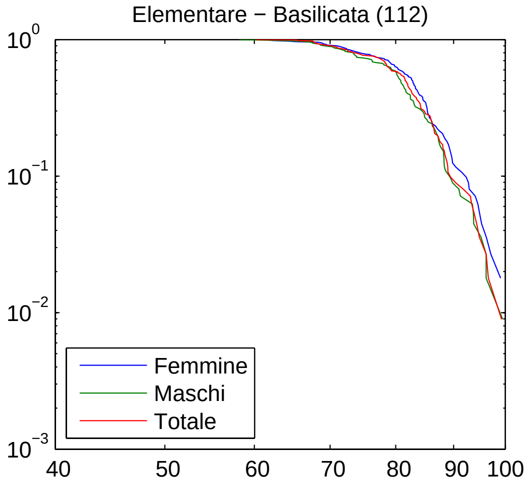

Elementare − Friuli (128)
Elementare − Emilia (396)
Elementare − Toscana (385)
Elementare − Umbria (96)
Elementare − Marche (188)
Elementare − Lazio (717)
Femmine
Maschi
Totale
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40
50
60
70
80
90
100

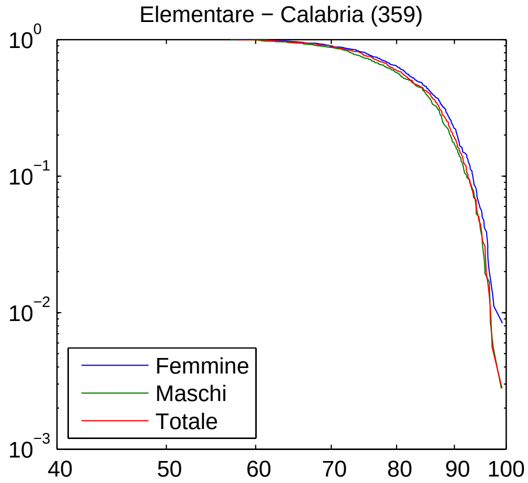

Elementare − Abruzzo (176)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

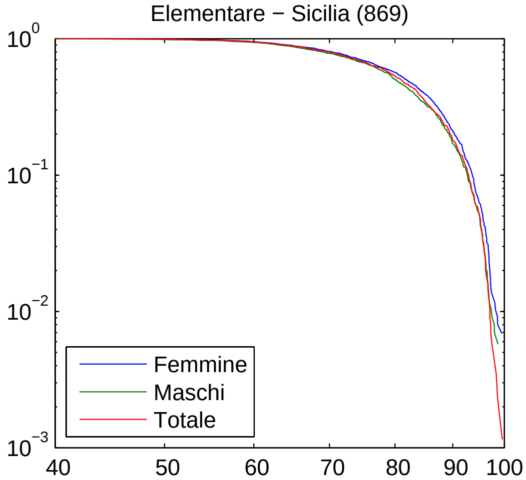

Elementare − Molise (60)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

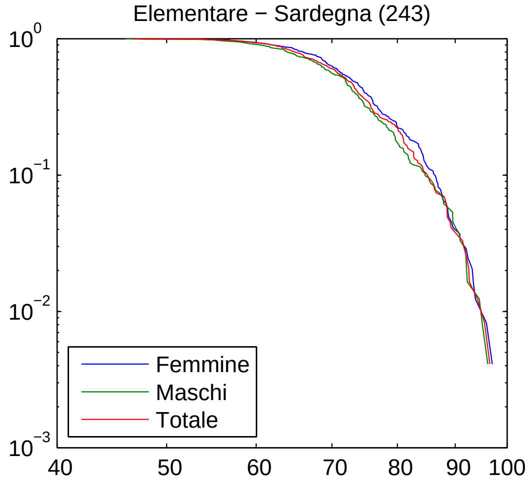

Elementare − Campania (1018)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale


Elementare − Puglia (497)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale


Elementare − Basilicata (112)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

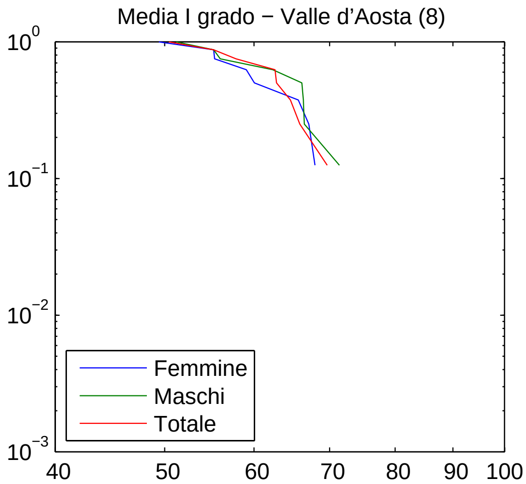

Elementare − Calabria (359)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

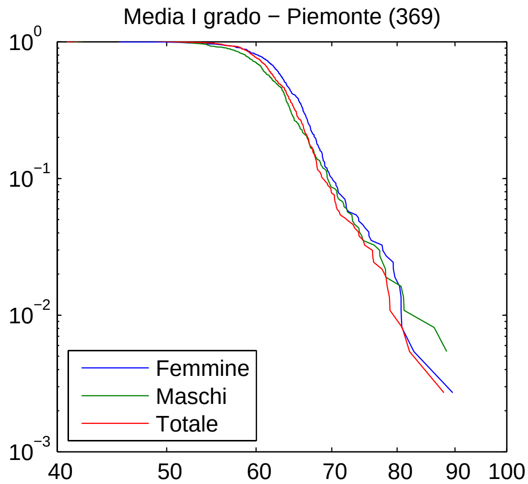


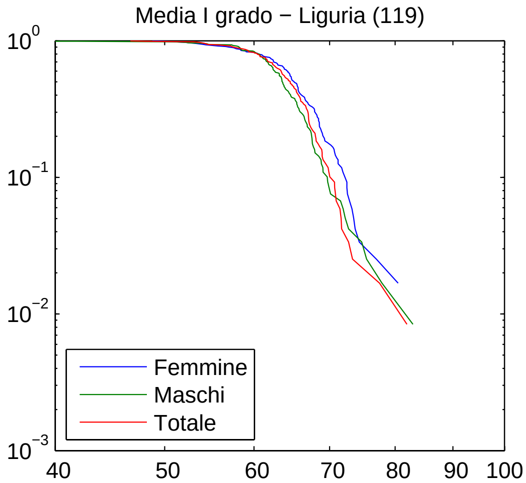


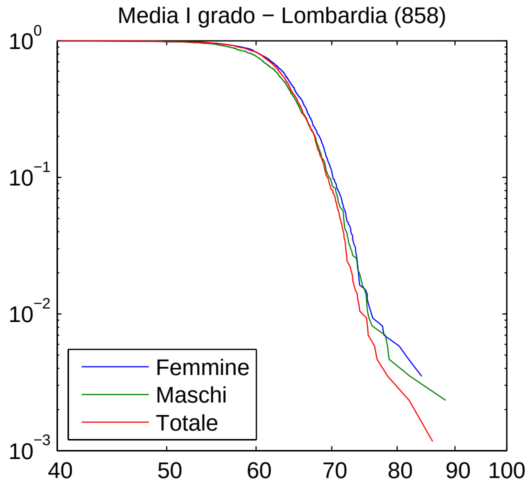
3.2 Dimensione frattale per le scuole medie inferiori

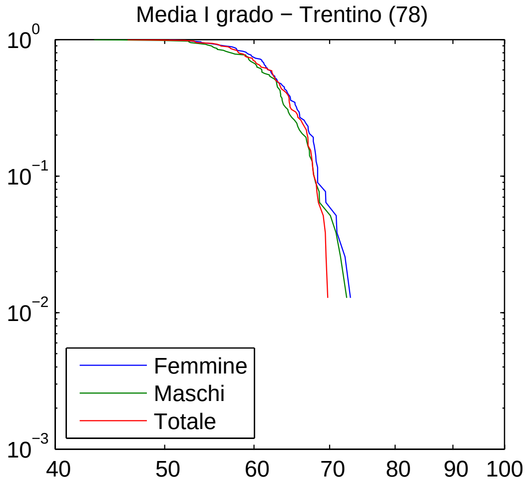
Riportiamo ora l'andamento del grafico per le scuole medie inferiori disaggregato per regioni. Anche in questo caso il dato nazionale non risulta omogeneo per regioni, anche se in maniera meno evidente che per le scuole elementari: l'andamento frattale sembra sussistere per le regioni del Centro-Nord in un range più ampio che per il Sud. Continua invece a valere l'omogeneità per sesso.

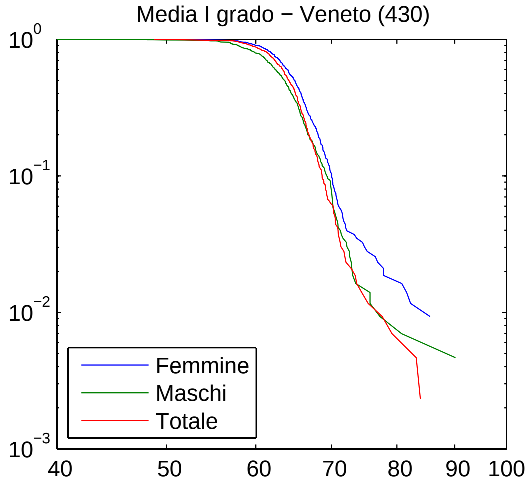

Media I grado − Valle d'Aosta (8)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

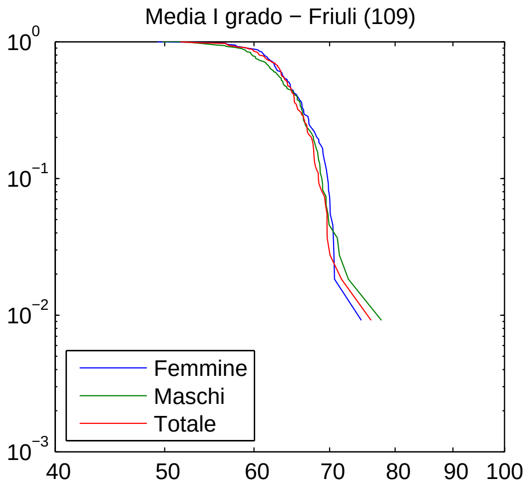

Media I grado − Piemonte (369)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

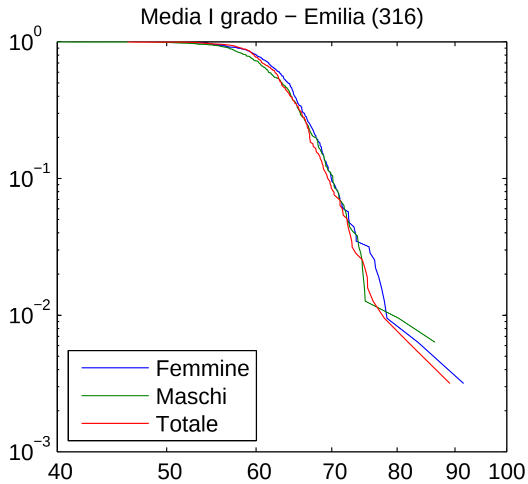

Media I grado − Liguria (119)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

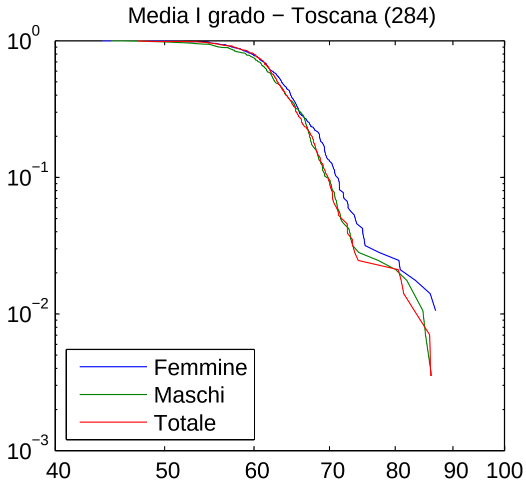

Media I grado − Lombardia (858)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

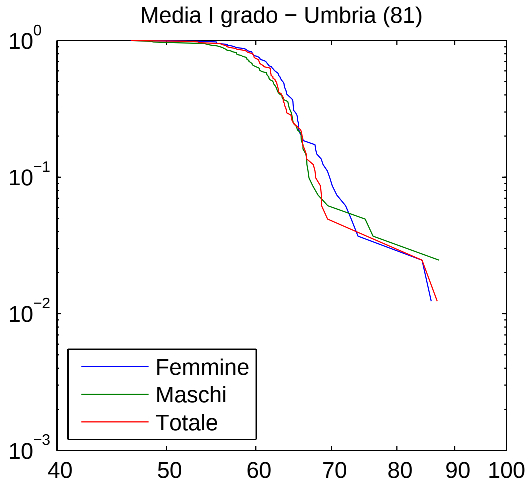

Media I grado − Trentino (78)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

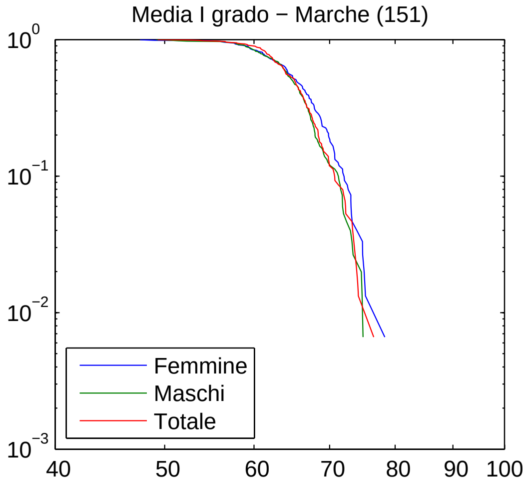

Media I grado − Veneto (430)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40 50 60 70 80 90 100
Femmine
Maschi
Totale

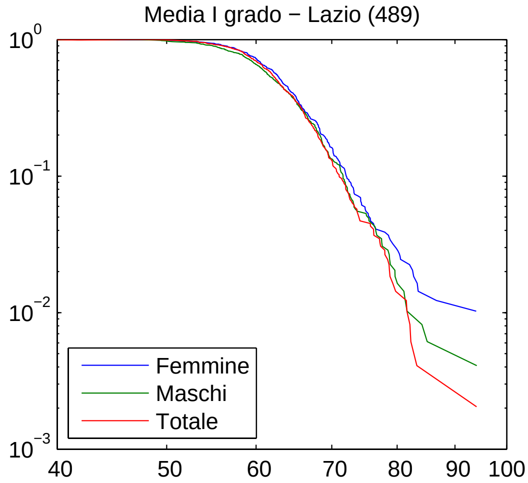

Media I grado − Friuli (109)
10^0
10^−1
10^−2
10^−3
40
50
60
70
80
90
100
Femmine
Maschi
Totale


Media I grado − Emilia (316)
10^0
10^−1
10^−2
10^−3
40
50
60
70
80
90
100
Femmine
Maschi
Totale

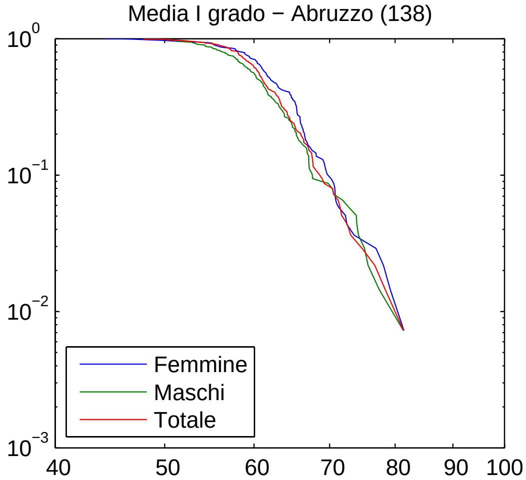

Media I grado − Toscana (284)
10^0
10^−1
10^−2
10^−3
40
50
60
70
80
90
100
Femmine
Maschi
Totale


Media I grado − Umbria (81)
10^0
10^−1
10^−2
10^−3
40
50
60
70
80
90
100
Femmine
Maschi
Totale

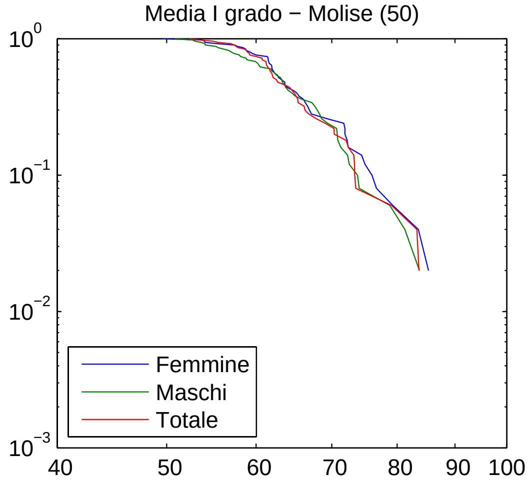

Media I grado − Marche (151)
10^0
10^−1
10^−2
10^−3
40
50
60
70
80
90
100
Femmine
Maschi
Totale


Media I grado − Lazio (489)
10^0
10^−1
10^−2
10^−3
40
50
60
70
80
90
100
Femmine
Maschi
Totale

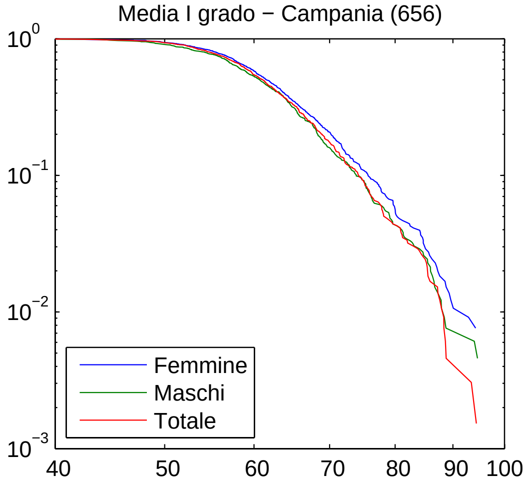
Media I grado − Abruzzo (138)



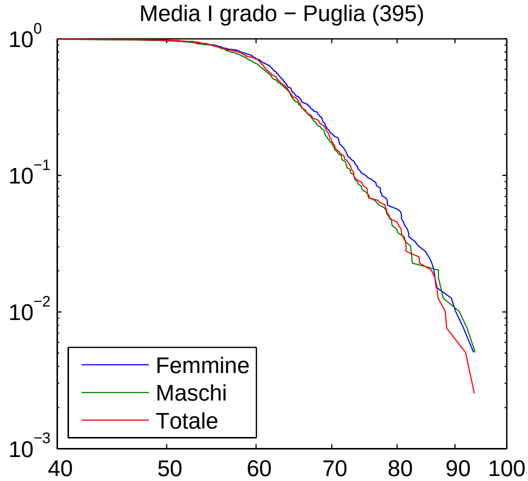
Media I grado − Molise (50)



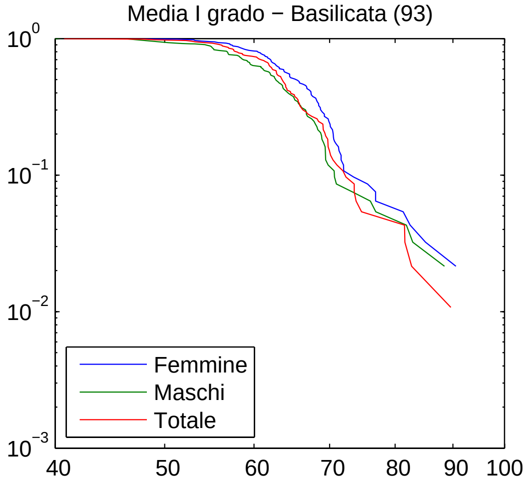
Media I grado − Campania (656)



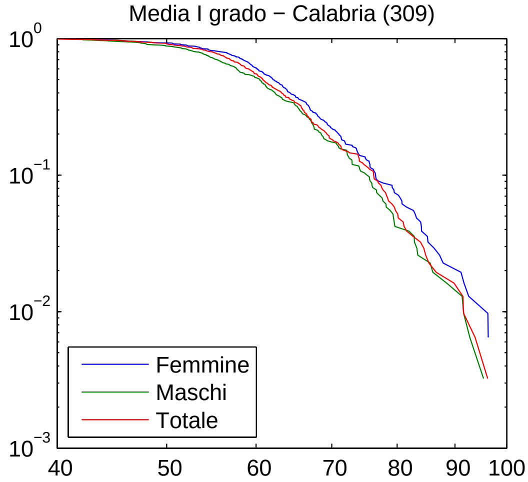
Media I grado − Puglia (395)

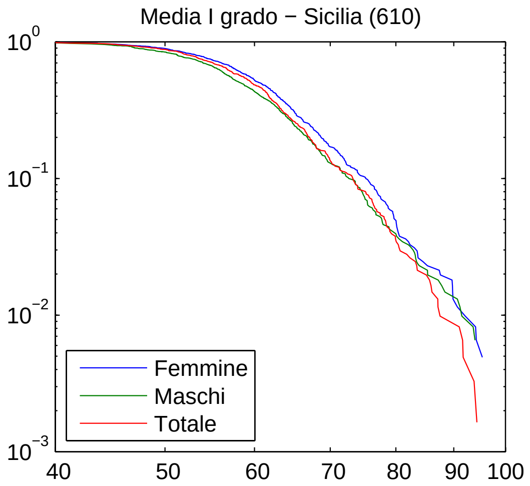


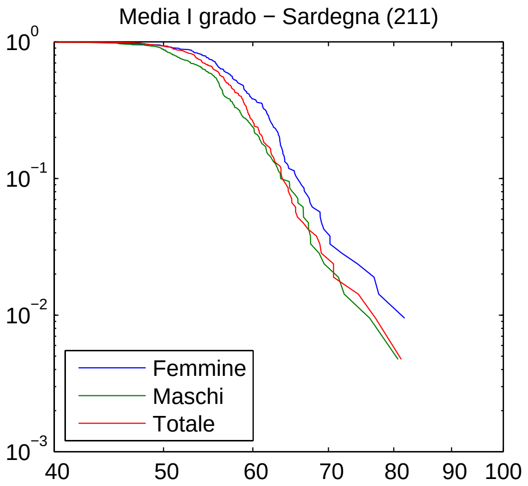
Media I grado − Basilicata (93)



Media I grado − Calabria (309)




Media I grado − Sicilia (610)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40
50
60
70
80
90
100
Femmine
Maschi
Totale


Media I grado − Sardegna (211)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
40
50
60
70
80
90
100
Femmine
Maschi
Totale

Discussione

Il report ha dimostrato in maniera evidente la presenza di un comportamento frattale nelle abilità degli studenti stimata tramite il Sistema di Valutazione Nazionale INVALSI. Va in primo luogo osservato che tale conclusione non era affatto scontata, come dimostra l'analisi disaggregata per tipologia di scuola e per regione. In particolare vi è una netta differenza di comportamento tra scuole elementari e scuole medie e tra regioni del Centro-Nord e del Sud.

Prima ancora di abbozzare un tentativo di interpretazione dei risultati, è doveroso ricordare che l'analisi è stata effettuata senza un controllo di qualità dei dati (dati grezzi), per cui andrà verificata in una seconda fase del progetto alla luce delle risultanze che emergeranno dall'Analisi di Qualità prevista all'interno del progetto. Tuttavia non si può non notare come l'assenza di un comportamento frattale evidente si manifesti per le scuole elementari dove il problema della qualità dei dati è maggiore a causa della probabile maggiore interazione degli scolari con i sorveglianti che assistono alla valutazione.

Va precisato il fatto rilevante che il dato riscontrato risulta omogeneo anche per l'anno scolastico 2005-2006, il che rafforza l'analisi svolta e l'indicazione della presenza di un comportamento frattale (o di comportamenti anomali costanti nella rilevazione) nel Sistema Scolastico.

Nel prosieguo della ricerca, oltre alla validazione dell'analisi mediante controllo di qualità dei dati, si prevede di ricavare almeno un ulteriore indicatore di comportamento frattale nello spazio utilizzando le coordinate geografiche degli Istituti. Tale analisi verrà preliminarmente condotta per la Campania e, in caso di risultati positivi, estesa al resto dell'Italia.

Bibliografia

B.B. Mandelbrot: Fractals, Forms, Chance and Dimension (W.H. Freeman, San Francisco), 1977

A.A. Tsonis: Chaos. From Theory to Applications (Plenum Press, New York), 1992.